

3. Übungsblatt (erschienen am 31.10.2023)

Aufgabe 3.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]

Bestimmen Sie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_0^1 f(x) dx$ die vier Gewichte w_1, w_2, w_3, w_4 der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formel mit $m = 4$ äquidistanten Knoten.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx$ werden die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln mit einer ungeraden Anzahl $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, äquidistanter Knoten betrachtet.

- Vergewissern Sie sich, dass $x_{m+1-i} = -x_i$ für $i = 1, \dots, m$ gilt.
- Zeigen Sie, dass die Gewichte symmetrisch sind, dass also $w_{m+1-i} = w_i$, für $i = 1, \dots, m$, gilt.
- Man zeige für diesen Spezialfall, dass die Newton-Cotes Formeln mit ungerader Anzahl Knoten $m = 2l + 1$ sogar Exaktheitsgrad $q = m$ haben.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel und der Simpsonformel soll ein adaptives Quadraturverfahren zur Berechnung von

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

implementiert werden.

Die Idee eines adaptiven Verfahren ist es, die Schrittweite nur in solchen Bereichen zu verfeinern, in denen sich die Funktionswerte schnell ändern.

Der Algorithmus soll rekursiv arbeiten: Zunächst wird für $h = (b - a)/2$ das Integral nach der Trapezformel $T[f]$ und der Simpsonformel $S[f]$ berechnet. Wird die Genauigkeit $|T[f] - S[f]| \leq \text{tol}$ erreicht, wobei tol vorgegeben ist, so soll $S[f]$ als Näherung für $I[f]$ verwendet werden und der Algorithmus soll abbrechen. Wird diese Genauigkeit nicht erreicht, so soll das Integrationsintervall und die Genauigkeit tol halbiert werden, und die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Integrale

$$I_1[f] = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \quad \text{und} \quad I_2[f] = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx$$

wiederholt werden.

Implementieren Sie den Algorithmus mit einer sich selbst rekursiv aufrufenden Funktion

$$[Q, \text{AnzF}] = \text{QuadAdapt}(\text{funkt}, \text{tol}, a, m, b, fa, fm, fb),$$

wobei a, b die Integrationsgrenzen bezeichnen, $m = \frac{1}{2}(a + b)$ den Mittelpunkt des Intervalls und fa, fb, fm jeweils die Funktionswerte $f(a), f(b)$ und $f(m)$ enthalten. In Q wird der Näherungswert für $I[f]$ und in AnzF die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgegeben.

Die Funktion `visualisiere_QuadAdapt` zeigt das Konvergenzverhalten dieser adaptiven Quadraturmethode im Vergleich zur zusammengesetzten Trapezformel. Hierzu werden für das Integral $I[f] = \int_{0.1}^3 \frac{1}{x} dx$ die Fehler der numerischen Integration gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen beider Methoden dargestellt (Funktionsaufruf: `visualisiere_QuadAdapt(@QuadAdapt)`). Was beobachten Sie?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 07.11.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 07.11.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den MATLAB-Grader einzugeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.