Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
30. Oktober 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Lie-Algebren

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, : \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{l} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & x \\ -t & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, : \, t, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

($\mathfrak{h}$ ist die *Heisenberg-Algebra.*) Entscheiden Sie, ob $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{l}$ auflösbar und/oder nilpotent sind.

(b) Sie $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$ und ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Die stereographische Projektion bildet die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bijektiv auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ab vermöge

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Die Gruppe

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \, : \, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

operiert auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via Möbiustransformation. Das Liften dieser Operation entlang φ gibt eine Operation von $\mathrm{SU}(2)$ auf S^2 die für $g \in \mathrm{SU}(2)$ explizit gegeben ist durch

$$g \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha^2 - \beta^2) & -\mathrm{Im}(\alpha^2 + \beta^2) & -2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta) \\ \mathrm{Im}(\alpha^2 - \beta^2) & \mathrm{Re}(\alpha^2 + \beta^2) & -2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta) \\ \mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) & -\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}) & |\alpha^2 - |\beta^2| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Sei $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Abbildung, die ein Element aus $\mathrm{SU}(2)$ auf die Matrix aus Gleichung (1) abbildet.

(a) Berechnen Sie $d\Phi$ auf der $\mathfrak{su}(2)$-Basis

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

indem Sie für jede dieser 2×2-Matrizen $\Phi(\exp tX)$ bei $t = 0$ differenzieren.

(b) Zeigen Sie, dass $d\Phi$ eine Bijektion $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass Φ eine Surjektion $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ und in einer Umgebung der Identität ein Diffeomorphismus ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Kern von Φ aus ± 1 besteht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ duch einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ faktorisiert.
Hinweis: Killing-Form.

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 6. November**.