Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
WS 2023
12. Oktober 2023

Vorkurs Mathematik
Dr. Johannes Horn

Aufgabenblatt 4

1 Eigenschaften von Abbildungen via Quantoren

Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Schreiben Sie die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv unter der Benutzung von Quantoren.

2 Mehr Beispiele

Prüfen Sie, ob die folgenden Definitionen Abbildungen definieren. Wenn ja, prüfen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x - 6.$

ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto 4x + 1.$

iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2.$

iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1.$

3 Bild und Urbild

Sei $f_1, f_2 : \{0,1,2,3,4,5\} \to \{0,1,2,3,4,5\}$ gegeben durch

$$f_1 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 0, 5 \mapsto 3$$
$$f_2 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 1.$$

i) Zeichnen Sie Pfeildiagramme zu f_1 und f_2.

ii) Berechnen Sie Bilder und Urbilder von $\{1,2,3\}, \{0,2,4\}, \{2\}, \{0,3\}$ unter f_1 und f_2.

iii) Zeigen Sie: Wenn wir $\{0,1,2,3,4,5\}$ als die ganzen Zahlen modulo 6, also als Reste beim Teilen durch 6, auffassen, dann entspricht f_1 der Multiplikation mit 3 und f_2 der Multiplikation mit 5.

4 Quantoren - Verneinung

Geben Sie die folgenden Aussagen in eigenen Worten wieder. Dann verneinen Sie die Aussagen. Hierbei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} : |y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(0)| < \epsilon.$

ii) $\forall n \in \mathbb{Z} : (n > 2 \wedge 2 \mid n) \; \exists p_1, p_2 \text{ Primzahlen} : n = p_1 + p_2.$

Ersteres ist die Definition von Stetigkeit der Funktion f am Punkt $0 \in \mathbb{R}$. Mehr dazu in Analysis 1. Letzteres ist die Goldbachvermutung von Blatt 1.