

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 2

Tagesablauf Vorkurs

- 10:15-11:45 Uhr Vorlesung in H11.
- 11:45-13:15 Uhr Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
- 13:15-14:15 Uhr Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H11 und H13.
- 14:15-14:45 Uhr Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“ (lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“, das entweder wahr oder falsch ist.

Verknüpfung von Aussagen

Negation	\neg	„nicht“	Äquivalenz	\Leftrightarrow	„genau dann, wenn“
Konjunktion	\wedge	„und“	Implikation	\Rightarrow	„aus ... folgt“
Disjunktion	\vee	„oder“			

Beweis von Äquivalenzen

Um eine Äquivalenz von Aussagen $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, müssen wir die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

Beweisverfahren

- Kontrapositionsprinzip
- Widerspruchsbeweis
- Beweis durch vollständige Induktion

Sätze in verschiedenen Rollen und von verschiedener Wertigkeit

Hauptsatz / Fundamentalsatz

Wichtigster Satz einer Arbeit, Hauptresultat eines Textes.

Proposition

Wichtiges Resultat das für die Theorie wesentlich ist und zum Hauptsatz hinführt.

Lemma

Technischer Hilfssatz, der keine große Bedeutung außerhalb der Theorie hat.

Korollar

Direkte Folgerung aus einem Satz.

Bemerkung

Hinweis des Autors, der unwesentlich für das Verständnis des Textes ist. Dennoch oft sehr wertvoll für den Leser.

Satz 11

Sei n eine ganze Zahl. Dann ist n gerade genau dann, wenn n^2 gerade ist.

Definition 12

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur durch ± 1 und $\pm p$ teilbar ist.

Proposition 13 (Primfaktorzerlegung)

Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$. Dann existieren Primzahlen p_1, \dots, p_k mit $p_1 \leq \dots \leq p_k$, sodass

$$n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k.$$

Dies bestimmt p_1, \dots, p_k eindeutig.

Direkter Beweis von Satz 11.

⇒: Satz 1, gestern bewiesen.

⇐: Wir nehmen zusätzlich an, dass $n > 1$. Der allgemeine Beweis folgt später.

Nach Proposition 13 existiert eine Primfaktorzerlegung

$$n = p_1 \cdots p_k \quad \text{mit} \quad p_1 \leq \cdots \leq p_k. \quad (1)$$

Dann ist $n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2$ die Primfaktorzerlegung von n^2 . Nach Annahme gilt $2 \mid n^2$. Auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit $p_1 = 2$. Also ist nach Einsetzen in (1) $n = 2 \cdot p_2 \cdots p_k$ und damit $2 \mid n$.



Das war kompliziert.

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führt man einige Beweisschritte/Implikationen durch um von A nach B zu gelangen:

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_k \Rightarrow B.$$

Hierbei sind C_1, \dots, C_k Aussagen, die Zwischenschritte darstellen.

Lemma 14 (Kontrapositionsprinzip)

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beweis.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w



Beweis von Satz 11 mit Kontraposition.

⇒: Wie zuvor.

⇐: Die Kontraposition von „Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.“ lautet

„Wenn n ungerade ist, ist auch n^2 ungerade.“

Sei n ungerade, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $n = 2k + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1.$$

Also ist n^2 ungerade.



Beim Widerspruchsbeweis einer Aussage A nehmen wir $\neg A$ an und versuchen einen Widerspruch herzuleiten.

Schwierigkeit: Es ist nicht klar wozu ein Widerspruch entsteht.

Widerspruchsbeweis

Unendlichkeit der Primzahlen

Satz 15 (Euklid 300 v. Chr.)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, \dots, p_n . Definiere die ganze Zahl

$$k = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Nach Proposition 13 existieren Primzahlen q_1, \dots, q_k , sodass $k = q_1 \cdots q_l$. Sei $q_1 = p_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $p_i \mid k$ und $p_i \mid p_1 \cdots p_n$. Damit folgt aber

$$p_i \mid k - p_1 \cdots p_n = 1.$$

im Widerspruch zur Annahme, dass p_i eine Primzahl ist. □

Widerspruchsbeweis

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz 16

Es existieren keine ganzen Zahlen $a, b \neq 0$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Widerspruchsbeweis.

Seien a, b ganze Zahlen, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können annehmen, dass a, b keinen gemeinsamen Teiler $\neq \pm 1$ haben. Es gilt nach Quadrieren

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2. \quad (2)$$

Also ist a^2 gerade und damit nach Satz 11 auch a . Also existiert eine ganze Zahl k , sodass $a = 2k$. Einsetzen in (2) liefert

$$2b^2 = 4k^2 \xrightarrow{\text{Kuerzen}} b^2 = 2k^2 \Rightarrow 2 \mid b^2 \xrightarrow{\text{Satz 11}} 2 \mid b.$$

Also gilt $2 \mid a$ und $2 \mid b$ im Widerspruch zur Annahme. □

Definition 17

Eine Aussageform (oder auch Prädikat) $A(n)$ auf den natürlichen Zahlen ist ein sprachliches Gebilde, das von einer Variable n abhängt und nach Einsetzen einer natürlichen Zahl für n zu einer Aussage wird.

Beispiel: $A(n) = „n$ ist eine gerade Zahl.“

Satz 11 \Rightarrow Für alle natürlichen Zahlen n gilt, $A(n) \Leftrightarrow A(n^2)$.

Der **Induktionsbeweis** (auch **vollständige Induktion**) ist eine Methode um Aussagen der Form

„Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$.“

zu beweisen.

Satz 18 (Kleiner Satz von Gauss)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die **vollständige Induktion** beruht auf folgenden Eigenschaften von \mathbb{N} :

- Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger $S(n) > 1$.
- Wenn:
 - eine Teilmenge der natürlichen Zahlen 1 enthält und
 - für jede natürliche Zahl in dieser Teilmenge auch deren Nachfolger enthalten ist

Dann: Enthält die Teilmenge alle natürlichen Zahlen.

Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Angenommen

- i) es gilt $A(1)$ und
- ii) für alle natürliche Zahlen n gilt:
Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen n .

Aufschreiben von Induktionsbeweise:

- IA:** Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $A(1)$ gezeigt.
- IV:** Induktionsvoraussetzung: Wir notieren uns, die Aussage $A(n)$ für eine natürliche Zahl n .
- IS:** Induktionsschritt: Wir folgern $A(n + 1)$ aus $A(n)$.

Beweis von Satz 18.

IA: $A(1): 1 = \frac{n(n+1)}{2} = 1 \quad \checkmark.$

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS: Dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D.h. $A(n+1)$ gilt.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n . □

Satz 19

Für alle natürlichen Zahlen n ist $6^n + 4$ durch 5 teilbar.

Beweis.

IA: $A(1)$: $5 \mid 6 + 4 = 10 \quad \checkmark$.

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$5 \mid 6^n + 4.$$

IS: Dann folgt

$$6^{n+1} + 4 = 6(6^n) + 4 = (1 + 5)6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + (6^n + 4).$$

Nach IV gilt $5 \mid (6^n + 4)$ und somit folgt $5 \mid 6^{n+1} + 4$.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n . □