GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 1

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

09. - 13. Oktober 2023, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H11

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H11.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H11 und H13.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“ (lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben.
Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Material

Die Folien und das Aufgabenblatt werden täglich vor der Vorlesung online gestellt auf

Institut für Mathematik /Studium /Orientierungsveranstaltung & Vorkurs:

https://www.uni-frankfurt.de/115778371/Studium

Oder über meine Hompage/Lehre:

https://www.uni-frankfurt.de/115632224/Dr__Johannes_Horn

Ziel der Vorlesung

1. Eine langsame Annäherung an die Mathematik, wie sie an der Universität gelehrt wird.
2. Kennenlernen bestimmter Grundbegriffe für die spätere Vorlesung: Beweisverfahren, Logik, Mengen, Abbildungen, komplexe Zahlen.
3. Motivation für das Studium sammeln durch das Kennenlernen von netten Anwendungen, ungelösten Problemen und Ausblicken auf spätere Vorlesungen: Fehlererkennung bei ISBN, Euklidische Primzahlen, etc.

Leitlinien für gutes und produktives Miteinander

1. Mathematische Talent ist gleichmäßig zwischen verschiedenen Gruppen verteilt unabhängig vom geographischen, demographischen und ökonomischen Hintergrund.
2. Jeder kann in der Mathematik eine freudvolle, bedeutungsvolle und befähigende Erfahrung machen.
3. Fragen zu stellen ist ein wesentlicher Teil der Mathematik. Alle mathematischen Fragen sind erlaubt und erwünscht.

Vorraussetzungen

Wir setzten folgenden Begriffe voraus:

Natürliche Zahlen	$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$
Ganze Zahlen	$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
Rationale Zahlen	$\frac{n}{m}$, wobei n, m ganze Zahlen sind.
Reelle Zahlen	Rationale Zahlen und vieles mehr: Wurzeln $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, π, e, ...

Also: Was ist Mathematik?

Video: June Huh, Preisträger der Fields-Medaille 2022.

Eine trockene Antwort:

Mathematik ist ein Gedankengebäude bestehend aus

Aussagen / Sätzen,

die aus gewissen Grundannahmen, genannt

Axiome,

logisch geschlussfolgert werden. Den Prozess des logischen Schlussfolgerns nennen wir

Beweisen.

Aussagen und Sätze

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“, das entweder wahr oder falsch ist.

Satz 1

Sei n eine ganze Zahl, die so gewählt ist, dass eine zweite ganze Zahl k existiert, sodass $n = 2k$ gilt.

Dann existiert auch eine ganze Zahl l, sodass gilt $n^2 = 2l$.

$\leftarrow$ Aussage A: Voraussetzungen

$\leftarrow$ Aussage B: Folgerung

Der Satz hat die Form:
„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage B war.“
In Zeichen: $A \Rightarrow B$

Beweis

Satz 1

Sei n eine ganze Zahl, die so gewählt ist, dass eine zweite ganze Zahl k existiert, sodass $n = 2k$ gilt.

Dann existiert auch eine ganze Zahl l, sodass gilt $n^2 = 2l$.

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis nehmen wir die Voraussetzung des Satzes (Aussage A) an und folgern Aussage B durch eine Kette logischer Argumente.

Beweis auf der nächsten Folie.

Beweis von Satz 1.

Nach Annahme existiert eine ganze Zahl k, sodass $n = 2k$. Dann ist

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Also ist $l = 2k^2$ eine ganze Zahl, sodass

$$n^2 = 2l.$$

$\square$

Definitionen

Definitionen dienen zur Vergabe von Namen und Abkürzungen für mathematische Objekte oder Eigenschaften mathematischer Objekte. Sie sind weder wahr noch falsch, aber können mehr oder weniger sinnvoll sein.

Definition 2 (Teiler, gerade Zahl,Quadratzahl)

i) Eine ganze Zahl k teilt eine ganze Zahl n, in Zeichen $k \mid n$, wenn ein ganze Zahl l existiert, sodass $n = k \cdot l$. In diesem Fall heißt k Teiler von n.

ii) Eine ganze Zahl n heißt gerade, wenn 2 ein Teiler von n ist.

iii) Eine ganze Zahl n heißt Quadratzahl, wenn eine ganze Zahl k existiert, sodass $n = k^2$.

Satz 1

Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.

Tipps zum Lesen von Definitionen

Definition 2

ii) Eine ganze Zahl n heißt gerade, wenn 2 ein Teiler von n ist.

i) Verstehe ich alle Zeichen und Begriffe, die in der Definition vorkommen?
Begriffe: Ganze Zahl, Teiler.

ii) Kann ich ein Beispiel finden, dass die Definition erfüllt bzw. nicht erfüllt?
Beispiel: 2, Gegenbeispiel: 3

iii) Kann ich die Definition in eigenen Worten wiedergeben?
...

iv) Wie teste ich diese Eigenschaft?
Eine ganze Zahl ist gerade genau dann, wenn die letzte Ziffer in der Dezimaldarstellung gerade ist.

Tipps zum Lesen von Sätzen

i) Verstehe ich alle Zeichen und Begriffe, die im Satz vorkommen?
Ganze Zahl, teilbar, Quersumme:

Definition 3 (Quersumme)

Sei n eine ganze Zahl mit Dezimaldarstellung $n = n_k \dots n_0$, dann ist die Quersumme von n gegeben durch $n_0 + \cdots + n_k$.

ii) Was sind die Voraussetzungen? Was die Folgerung/Behauptung?
Quersumme durch 3 teilbar $\Rightarrow$ Ganze Zahl durch 3 teilbar.

iii) Warum sind die Voraussetzungen notwendig? Kann ich ein Gegenbeispiel finden, wenn ich Voraussetzungen weglasse?
Nicht jede ganze Zahl ist durch 3 teilbar.

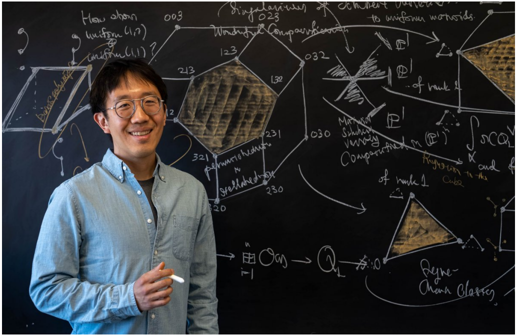
iv) Kann ich den Satz in eigenen Worten wiedergeben?

Satz 4

Eine ganze Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihr Quersumme durch 3 teilbar ist. (Beweis später!)

Weiter wie in mathematischen Vorlesungen üblich:

An der Tafel.



Ich empfehle mitzuschreiben!

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“ das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel

i) Aussage A = „$5 + 7 = 12$.“ Wahr.
ii) Aussage B = „Deutschland liegt in Europa.“ Wahr.
iii) Aussage C = „$7 \cdot 8 = 55$.“ Falsch.
iv) Der Term „$7 \cdot 8$ “ ist keine Ausage.

Aussagenlogik: Negation

Definition 5 (Negation)

Sei A eine Aussage. Die Negation der Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet. Der Wahrheitswert der Negation ist durch die nebenstehende Wahrheitstafel definiert

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel:

1. Aussage $B =$ „Deutschland liegt in Europa." Wahr.
   Aussage $\neg B =$ „Deutschland liegt nicht in Europa." Falsch.
2. Aussage $C =$ „$7 \cdot 8 = 55$." Falsch.
   Aussage $\neg C =$ „$7 \cdot 8 \neq 55$." Wahr.

Definition 6

Seien A und B zwei Aussagen.

- Die Konjunktion $A \wedge B$ der Aussagen A, B, gesprochen „A und B“ und
- die Disjunktion $A \vee B$ der Aussagen A, B, gesprochen „A oder B“

werden durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiel: Aussage $A =$ „$5 + 7 = 12$“, Aussage $B =$ „Deutschland liegt in Europa.“ , Aussage $C =$ „$7 \cdot 8 = 55$“.

- $A \wedge B$ ist wahr. $A \wedge C$ ist falsch.
- $A \vee B$ ist wahr. $A \vee C$ ist wahr. $C \vee \neg B$ ist falsch.

Äquivalenzen

Definition 7

Zwei Aussagen A und B sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert, d.h. die gleichen Werte in der Wahrheitstafel, haben.

In Zeichen: $A \Leftrightarrow B$.
In Worten: „A ist äquivalent zu B“ oder „A gilt genau dann, wenn B gilt“.

Satz 8 (De Morgan)

Seien A und B Aussagen. Dann ist

i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ *und*
ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Beweis i) auf der nächsten Folie. Beweis ii) Übung.

Beweis vom Satz 8 i).

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

$\square$

Definition 9

Seien A und B zwei Aussagen.
Die Implikation $A \Rightarrow B$ der Aussagen A, B, gesprochen „Aus A folgt B" wird durch die nebenstehende Wahrheitstafel definiert.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Achtung: **Aus eine falschen Aussage folgt alles.**

Beispiel: Aussage A : „Heute scheint die Sonne.", Aussage B: „Wir gehen spazieren."

$(A \Rightarrow B)$= „Wenn heute die Sonne scheint, gehen wir spazieren".

Über den Fall, dass die Sonne nicht scheint wird keine Aussage getroffen. Die Aussage bleibt wahr, ob wir bei schlechtem Wetter spazieren gehen oder nicht.

Wie werden Äquivalenzen bewiesen?

Satz 10

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Wichtig: Der Beweis eine Äquivalenz beinhaltet also immer den Beweis der Implikationen in beide Richtungen!

Beweis.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

$\square$

Tipps für die Übungen

- **Sprecht über Mathe!** Findet euch zu kleinen Gruppen von 3-5 Studierenden zusammen. Redet über die Aufgaben. Versucht gemeinsam eine Lösung zu finden, sodass jeder der Gruppe jeden Schritt verstanden hat.
- **Schreibt die Lösung selbstständig auf!** Versucht die gemeinsam gefundene Lösung selbstständig aufzuschreiben. Habe ich wirklich jeden Schritt verstanden und im Aufschrieb verständlich erklärt?

Lernzentrum	Hier können Studierende der Mathematik die aktuellen Übungsaufgaben unter Anleitung bearbeiten, Fragen zu den Vorlesungen des Grundstudiums stellen und alleine oder in Gruppen arbeiten.
Wo	Robert-Mayer-Str. 10, Raum 405.
Wann	Mo-Fr 13-16 Uhr.