Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 4

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

30. März - 05. April 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H12/HIII

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in HIII.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H10 und H11.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Wiederholung

Einführung in die Mengenlehre

Seien M, N Mengen.

$N \subset M$	Teilmenge	$M \cap N$	Schnitt
$M = N$	Gleichheit	$M \setminus N$	Differenz
$M \cup N$	Vereinigung		

Modulo Rechnen

Rechnen mit Resten und Teilbarkeitskriterium.

Plan für heute

- Abbildungen
- Quantoren

Definition 33 (Abbildung/Funktion)

Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** oder Funktion f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $m \in M$ genau ein Element $f(m) \in N$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : M \to N, \quad m \mapsto f(m).$$

Wir bezeichnen

i) M als **Definitionsmenge** oder Definitionsbereich von f,
ii) N als **Zielmenge** oder Zielbereich von f,
iii) $m \mapsto f(m)$ als **Abbildungsvorschrift**,
iv) $f(m)$ als **Bild** oder Funktionswert von $m \in M$ unter f.

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung.

ii) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n}{2}$ ist keine Abbildung, da zum Beispiel 1 kein Funktionswert in $\mathbb{N}$ zugeordnet wird.

iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{n}{2}$ ist eine Abbildung.

iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y$, sodass $x = 3y)$ ist eine Abbildung, da die Gleichung eindeutig lösbar ist.

v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y$, sodass $y^2 = x)$ ist keine Abbildung, da die Gleichung für $x > 0$ zwei Lösungen hat, für $x < 0$ keine.

vi) $f_6 : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3$ definiert eine Abbildung.

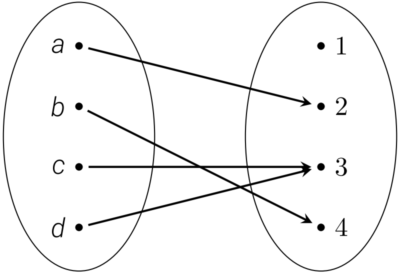


Abbildung: Pfeildiagramm der Abbildung f_6

Definition 34

Zwei Abbildungen $f: M_1 \to N_1, g: M_2 \to N_2$ sind gleich, wenn

- sie die gleiche Definitionsmenge haben, in Zeichen $M_1 = M_2$
- sie die gleiche Zielmenge haben, in Zeichen $N_1 = N_2$, und
- die Abbildungsvorschrift übereinstimmt, in Zeichen $\forall m \in M_1 = M_2 : f(m) = g(m)$.

Beispiel:

i) Die Abbildungen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und $g_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ sind nicht gleich.

ii) Die Abbildungen $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y, \text{sodass } x = 3y)$ und die Abbildung $g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{3}$ sind gleich.

Bild und Urbild

Definition 35

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Seien $T \subset M, S \subset N$ Teilmengen, dann ist

- das Bild $f(T)$ von T unter f definiert als die Menge

$$f(T) = \{n \in N \mid \text{es existiert } t \in T : f(t) = n\} \subset N.$$

- das Urbild $f^{-1}(S)$ von S unter f definiert als die Menge

$$f^{-1}(S) = \{m \in M \mid f(m) \in S\} \subset M.$$

- das Bild der Abbildung f die Menge $f(M) \subset N$.

Vorsicht: Bild und Urbild sind für Mengen definiert.
Sei $m \in M$, dann ist $f(m) \in M$ der Funktionswert, aber $f(\{m\}) = \{f(m)\}$ das Bild von $\{m\}$ unter f.

Bild und Urbild

$$f_6 : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\},$$
$$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3$$

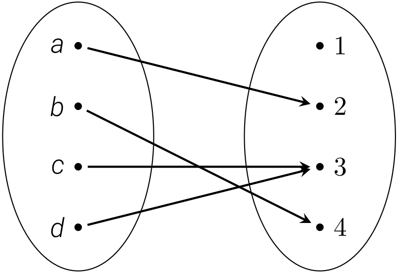


Abbildung: Pfeildiagramm der Abbildung f_6

Bilder:

Das Bild von $\{c, d\}$ unter f_6 ist $\{3\}$.

Das Bild von $\{a, b\}$ unter f_6 ist $\{2, 4\}$.

Das Bild von f_6 ist $\{2, 3, 4\}$.

Urbilder:

Das Urbild von $\{1\}$ unter f ist $\varnothing$.

Das Urbild von $\{1, 2, 4\}$ ist $\{a, b\}$.

Das Urbild von $\{3\}$ ist $\{c, d\}$.

Definition 36

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **injektiv**, wenn für alle $n, m \in M$ gilt, falls $n \neq m$ dann $f(n) \neq f(m)$.

- Obige Abbildung f_6 ist nicht injektiv, da $f(c) = f(d)$, aber $c \neq d$.
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(1) = f(-1)$.
- $g_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.

Um die Injektivität zu beweisen zeigt man die Kontraposition. Das heißt wir zeigen

„Sei $m, n \in M$ mit $f(m) = f(n)$, dann folgt $m = n$."

Beweis der Injektivität von g_1.

Sei $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $x^2 = y^2$. Dann ist $x = \pm y$. Da aber $x, y \geq 0$ folgt $x = y$. Damit ist g_1 injektiv. $\square$

Surjektivität

Definition 37

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $n \in N$ ein $m \in M$ existiert, sodass $f(m) = n$.

- Obige Abbildung f_6 ist nicht surjektiv, da für kein $m \in \{a, b, c, d\}$ gilt $f(m) = 1$.
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
- $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

Für den Beweis der Surjektivität müssen wir für jedes $n \in N$ ein Urbild $m \in f^{-1}(n)$ finden.

Beweis der Surjektivität von h_1.

Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann existiert eine reelle Zahl $y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, sodass $y^2 = x$. Damit ist h_1 surjektiv. $\square$

Surjektivität und Bild

Lemma 38

Sei $f : M \to N$, dann ist f surjektiv genau dann wenn das Bild von f die Zielmenge N ist.

Beweis.

Das Bild von f ist definiert als

$$f(M) = \{n \in N \mid \text{es existiert } m \in M : f(m) = n\} \subset N.$$

Falls f surjektiv ist, gilt für alle $n \in N$ existiert ein $m \in M$ mit $n = f(m)$, das heißt $N \subset f(M)$ und damit gilt Gleichheit.
Falls umgekehrt $f(M) = N$, dann existiert zu jedem $n \in N$ ein $m \in M$, sodass $f(m) = n$. Somit ist f surjektiv. □

Wir können also jede Abbildung surjektiv machen, indem wir das Bild von f zur Zielmenge machen.

Bijektivität

Definition 39

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Charakterisierung in Form der Urbilder:

injektiv	Alle $n \in N$ haben höchstens ein Urbild unter f.
surjektiv	Alle $n \in N$ haben mindestens ein Urbild unter f.
bijektiv	Alle $n \in N$ haben genau ein Urbild unter f.

Beispiel: $F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Definition 40

Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ definiert durch

$$n \mapsto (m, \quad \text{sodass} \quad f(m) = n).$$

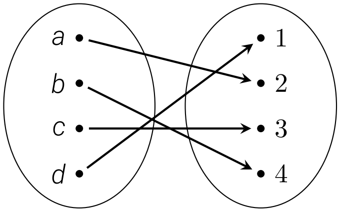
Mehr Beispiele

- $F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion von F_1 ist die Wurzelfunktion $F_1^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$.
- $G : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $G^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1$.
- $H : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 1$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung $H^{-1} : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ ist gegeben durch

$$1 \mapsto d, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b.$$



Wiederholung

Eine Aussageform $A(m)$ auf einer Menge M ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer Variable in M abhängt und nach Einsetzen von $m \in M$ zu einer Aussage wird.

Sei nun M eine Menge und A eine Aussageform auf M. Viele mathematische Aussagen sind von der folgenden Form:

„Für alle $m \in M$, gilt $A(m)$."

oder „Es existiert ein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."

Zum Beispiel sind Aussagen, die sich für den Induktionsbeweis eignen, von der Form:

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, gilt $A(n)$. "

Deshalb führen wir Symbole für „für alle" und „es existiert" ein.

Definition 41

Sei M eine Menge und $A(m)$ eine Aussageform auf M.

Allquantor	$\forall\, m \in M : A(m)$	„Für alle $m \in M$ gilt $A(m)$."
Existenzquantor	$\exists\, m \in M : A(m)$	„Es existiert ein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."
	$\exists!\, m \in M : A(m)$	„Es existiert genau ein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."
	$\nexists\, m \in M : A(m)$	„Es existiert kein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."

Beispiele: Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen.

- $\forall\, n \in \mathbb{N} : 3 \mid n^3 - n$.
- $\exists!\, p \in \mathcal{P} : p$ ist gerade.
- $\forall\, n \in \mathbb{N} : n > 1\ \exists\, p \in \mathcal{P} : p \mid n$.
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} : n \mid m$.

Beispiel:

Die Negation von „Alle Katzen sind schwarz. “

ist „Es existiert eine Katze, die nicht schwarz ist.“

Negation von Quantoren

Sei M eine Menge und A eine Aussageform auf M.

Aussage	Negation
$\forall\, m \in M : A(m)$	$\exists\, m \in M : \neg A(m)$
$\exists\, m \in M : A(m)$	$\forall\, m \in M : \neg A(m)$

Die Negation von $\forall\, n \in \mathbb{N} : n > 1\ \exists\, p \in \mathcal{P} : p \mid n$

ist $\exists\, n \in \mathbb{N} : n > 1\ \forall\, p \in \mathcal{P} : p \nmid n$.