Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 2

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

30. März - 05. April 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H12/HIII

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H8 und H11.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore"(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Wiederholung

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“ , das entweder wahr oder falsch ist.

Verknüpfung von Aussagen

Negation	$\neg$	„nicht“	Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
Konjunktion	$\wedge$	„und“	Implikation	$\Rightarrow$	„aus ... folgt“
Disjunktion	$\vee$	„oder“			

Beweis von Äquivalenzen

Um eine Äquivalenz von Aussagen $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, müssen wir die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

Beweisverfahren

- Kontrapositionsprinzip
- Widerspruchsbeweis
- Beweis durch vollständige Induktion

Satz, Lemma, Korollar, ...

Sätze in verschiedenen Rollen und von verschiedener Wertigkeit

Hauptsatz / Fundamentalsatz	Wichtigster Satz einer Arbeit, Hauptresultat eines Textes.
Proposition	Wichtiges Resultat das für die Theorie wesentlich ist und zum Hauptsatz hinführt.
Lemma	Technischer Hilfssatz, der keine große Bedeutung außerhalb der Theorie hat.
Korollar	Direkte Folgerung aus einem Satz.
Bemerkung	Hinweis des Autors, der unwesentlich für das Verständnis des Textes ist. Dennoch oft sehr wertvoll für den Leser.

Äquivalenz

Satz 11

Sei n eine ganze Zahl. Dann ist n gerade genau dann, wenn n^2 gerade ist.

Definition 12

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur durch ± 1 und $\pm p$ teilbar ist.

Proposition 13 (Primfaktorzerlegung)

Sei n eine ganze Zahl mit $n \neq 0, \pm 1$. Dann existieren Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ mit $p_1 \leq \cdots \leq p_k$, sodass

$$n = (\pm 1) \cdot p_1 \cdots p_k.$$

Dies bestimmt $p_1, \ldots, p_k$ eindeutig.

Beweis

Direkter Beweis von Satz 11.

$\Rightarrow$: Satz 1, gestern bewiesen.

$\Leftarrow$: Sei n eine ganze Zahl. Für $n = 0$ ist $n^2 = 0$. Damit stimmt die Aussage. Außerdem ist $n = \pm 1$ nicht gerade. Also können wir annehmen $n \neq 0, \pm 1$. Folglich existiert nach Proposition 13 eine Primfaktorzerlegung $n = (\pm 1) \cdot p_1 \cdots p_k$ mit $p_1 \leq \cdots \leq p_k$. Dann ist die Primfaktorzerlegung von n^2 gegeben durch

$$n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2$$

Nach Annahme gilt $2 \mid n^2$. Auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist damit $p_1 = 2$. Also gilt auch $2 \mid n$.

$\square$

Das war kompliziert.

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führt man einige Beweisschritte/Implikationen durch um von A nach B zu gelangen:

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_k \Rightarrow B.$$

Hierbei sind $C_1, \ldots, C_k$ Aussagen, die Zwischenschritte darstellen.

Lemma 14 (Kontrapositionsprinzip)

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beweis.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

$\square$

Beweis mit Kontrapositionsprinzip

Beweis von Satz 11 mit Kontraposition.

$\Rightarrow$: Wie zuvor.

$\Leftarrow$: Die Kontraposition von „Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.“ lautet

„Wenn n ungerade ist, ist auch n^2 ungerade.“

Sei n ungerade, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $n = 2k + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1.$$

Also ist n^2 ungerade. $\square$

Widerspruchsbeweis

Beim Widerspruchsbeweis einer Aussage A nehmen wir $\neg A$ an und versuchen einen Widerspruch herzuleiten.
Schwierigkeit: Es ist nicht klar wozu ein Widerspruch entsteht.

Lemma 15

Seien A und B Aussagen dann gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Beweis.

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	f

$\square$

Beim Widerspruchsbeweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führen wir $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch.

Satz 16 (Euklid 300 v. Chr.)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Definiere die ganze Zahl

$$k = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Nach Proposition 13 existieren Primzahlen $q_1, \ldots, q_k$, sodass $k = q_1 \cdots q_l$. Sei $q_1 = p_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $p_i \mid k$ und $p_i \mid p_1 \cdots p_n$. Damit folgt aber

$$p_i \mid k - p_1 \cdots p_n = 1.$$

im Widerspruch zur Annahme, dass p_i eine Primzahl ist. $\square$

Satz 17

Es existieren keine ganzen Zahlen $a, b \neq 0$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Widerspruchsbeweis.

Seien a, b ganze Zahlen, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können annehmen, dass a, b keinen gemeinsamen Teiler $\neq \pm 1$ haben. Es gilt nach Quadrieren

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2. \tag{1}$$

Also ist a^2 gerade und damit nach Satz 11 auch a. Also existiert eine ganze Zahl k, sodass $a = 2k$. Einsetzen in (1) liefert

$$2b^2 = 4k^2 \quad \overset{\text{Kuerzen}}{\Rightarrow} \quad b^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \mid b^2 \quad \overset{\text{Satz 11}}{\Rightarrow} \quad 2 \mid b.$$

Also gilt $2 \mid a$ und $2 \mid b$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Aussageform auf den natürlichen Zahlen

Definition 18

Eine Aussageform (oder auch Prädikat) $A(n)$ auf den natürlichen Zahlen ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer Variable n abhängt und nach Einsetzen einer natürlichen Zahl für n zu einer Aussage wird.

Beispiel: $A(n)$= „n ist eine gerade Zahl."
Satz 11 $\Rightarrow$ Für alle natürlichen Zahlen n gilt, $A(n) \Leftrightarrow A(n^2)$.

Der **Induktionsbeweis** (auch **vollständige Induktion**) ist eine Methode um Aussagen der Form

„Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$."

zu beweisen.

Satz 19 (Kleiner Satz von Gauss)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die **vollständige Induktion** beruht auf folgenden Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

- Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger $S(n) > 1$.
- Wenn: - eine Teilmenge der natürlichen Zahlen 1 enthält und
  - für jede natürliche Zahl in dieser Teilmenge auch deren Nachfolger enthalten ist

  Dann: Enthält die Teilmenge alle natürlichen Zahlen.

Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Angenommen

i) es gilt $A(1)$ und

ii) für alle natürliche Zahlen n gilt:
Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen n.

Aufschreiben von Induktionsbeweise:

IA: Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $A(1)$ gezeigt.

IV: Induktionsvoraussetzung: Wir notieren uns, die Aussage $A(n)$ für eine natürliche Zahle n.

IS: Induktionsschritt: Wir folgern $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Beweis von Satz 19.

IA: $A(1)$: $\quad 1 = \frac{n(n+1)}{2} = 1 \quad \checkmark.$

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS: Dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D.h. $A(n+1)$ gilt.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n. $\square$

Induktionsbeweis

Satz 20

Für alle natürlichen Zahlen n ist $6^n + 4$ *durch* 5 *teilbar.*

Beweis.

IA: $A(1)$: $5 \mid 6 + 4 = 10 \quad \checkmark$.

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$5 \mid 6^n + 4.$$

IS: Dann folgt

$$6^{n+1} + 4 = 6(6^n) + 4 = (1 + 5)6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + (6^n + 4).$$

Nach IV gilt $5 \mid (6^n + 4)$ und somit folgt $5 \mid 6^{n+1} + 4$.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n. $\square$