GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 25.01.2023)

Aufgabe 7.1 (Theorieaufgabe)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $T > 0$ und $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$. Wir betrachten die parabolische partielle Differentialgleichung

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + u(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega,\, t \in (0,T) \tag{1}$$

mit Anfangswerten $u(x,0) = u_0(x) \in L^2(\Omega)$ und homogenen Dirichletrandwerten. Zeigen Sie, dass genau ein $u \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ existiert, das (1) löst.

Hinweis: Verwenden Sie die variationelle Formulierung aus Bemerkung 4.3(b) (iv), um dann mit dem Satz von Lions-Lax-Milgram für $H := L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ und $V := \{v \in W(0,T,H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)) : v(\cdot,T) = 0\}$, wobei die V-Norm durch $\|v\|_V^2 := \|v\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 + \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$ definiert ist, die Existenz zu zeigen. Dabei kann die partielle Integrationsformel aus Lemma 4.2 hilfreich sein.

Aufgabe 7.2 (Programmieraufgabe)

Wir übernehmen das Gebiet Ω und das Teilgebiet D des 6. Übungsblattes und betrachten die parabolische partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = \chi_D, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = 0. \tag{2}$$

Wir wollen die *vertikale Linienmethode* verwenden, um eine Approximation an die wahre Lösung zu erhalten. Dazu wird zuerst bezüglich des Ortes diskretisiert. Mit $b(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$ lautet die variationelle Formulierung von (2) (vgl. Bemerkung 4.3 (b) (iii)): finde $u \in W(0,T,H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$, sodass $u(x,0) = 0$ und

$$\langle \dot{u}(t), v\rangle + b(u(t),v) = \int_\Omega \chi_D(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\, t \in (0,T) \text{ fast überall.}$$

Wir wählen wieder $V^{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)$ (den Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen, vgl. Übungsblatt 5) als Ansatzraum und suchen eine Funktion $u_N : [0,T] \to V^{\mathcal{T}}$, mit $u_N(0) = 0$ und

$$\int_\Omega u_N(t) v\,\mathrm{d}x + b(u(t),v) = \int_\Omega \chi_D(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V^{\mathcal{T}},\, t \in (0,T) \text{ fast überall.}$$

Offenbar gilt $u_N(t) = \sum_{j=1}^m \eta_j(t)\Lambda_j$, mit den *Koeffizientenfunktionen* $\eta_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $u_N(t)$ löst genau dann das obige variationelle Problem, wenn die Koeffizientenfunktionen das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \dot{\eta}_j(t) \int_\Omega \Lambda_j \Lambda_k\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^m \eta_j(t) b(\Lambda_j,\Lambda_k) = \int_\Omega \chi_D(x)\Lambda_k(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall k = 1,\dots,m$$

lösen. Mit der Notation

$$y(t) := (\eta_j(t))_{j=1}^m : [0,T] \to \mathbb{R}^m, \qquad h(t) := \left(\int_\Omega \chi_D(x)\Lambda_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{k=1}^m : [0,T] \to \mathbb{R}^m,$$

$$G := \left(\int_\Omega \Lambda_j\Lambda_k\,\mathrm{d}x\right)_{j,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad B := (b(\Lambda_j,\Lambda_k))_{j,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

gilt es also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = G^{-1}(h(t) - By(t)) \tag{3}$$

zu lösen.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, welche zu einer Zeitschrittweite $\tau > 0$ eine Approximation an die wahre Lösung von (2) bestimmt, indem eine Approximation an (3) bestimmt wird mit:

(a) dem expliziten Euler-Verfahren, d.h.

$$\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} \approx G^{-1}(h(t) - By(t)),$$

(b) dem impliziten Euler-Verfahren, d.h.

$$\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} \approx G^{-1}(h(t+\tau) - By(t+\tau)),$$

(c) dem Crank-Nicholson-Verfahren, d.h.

$$\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} \approx \frac{1}{2}G^{-1}\left((h(t) - By(t)) + (h(t+\tau) - By(t+\tau))\right).$$

Verwenden Sie jeweils die Zeitschrittweite $\tau = \frac{1}{10}$ und berechnen Sie die Approximationen der ersten 1000 Zeitschritte. Visualisieren und vergleichen Sie ihre Ergebnisse.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 7 werden in der Übung am 01.02.2023 besprochen.