GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

4. Übungsblatt (erschienen am 30.11.2022)

Aufgabe 4.1 (Theorieaufgabe)
Der Approximationssatz von Weierstraß besagt, dass der Raum der Polynome auf $[0,1]$ bezüglich der Supremumsnorm dicht im Raum der stetigen Funktionen $C([0,1])$ liegt.
Folgern Sie, dass der Raum der Polynome auch bzgl. der H^1-Norm dicht in $H^1(]0,1[)$ liegt.

Aufgabe 4.2 (Theorieaufgabe)
Beweisen Sie die *Poincaré-Friedrichsche Ungleichung*: sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei Ω in einem d-dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Dann gilt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq s|v|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei zu $u \in H^m(\Omega)$ durch $|u|^2_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$ die $H^m(\Omega)$-*Seminorm* definiert wird.
Hinweis: Es gilt sogar $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq s\,\|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 4.3 (Theorieaufgabe)
Wir betrachten das homogene Dirichlet-Problem mit $c = 0$ aus Folgerung 2.42: sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $a \in L^\infty_+(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das homogene Dirichlet-Problem

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig und linear von der rechten Seite f abhängt. Zeigen Sie eine analoge Aussage auch für das inhomogene Dirichlet-Problem.

Aufgabe 4.4 (Programmieraufgabe)
Wir betrachten das homogene Neumannproblem

$$-\Delta u + u = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} \quad \text{in }]0,1[, \qquad u'(0) = 0,\ u'(1) = 0$$

und seine variationelle Formulierung

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

wobei für $u, v \in H^1(]0,1[)$

$$b(u,v) := \int_0^1 (u'v' + uv)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad l(v) := \int_{1/4}^{1/2} v\,\mathrm{d}x.$$

Weiterhin bezeichne $\Pi_n := \{u : [0,1] \to \mathbb{R},\ u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\}$ den Raum aller Polynome mit Höchstgrad n.

(a) Zeigen Sie, dass $u \in \Pi_n$ genau dann

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \Pi_n$$

löst, wenn die Koeffizienten von $u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b(1,1) & b(1,x) & \ldots & b(1,x^n) \\ b(x,1) & b(x,x) & \ldots & b(x,x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(x^n,1) & b(x^n,x) & \ldots & b(x^n,x^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(1) \\ \vdots \\ l(x^n) \end{pmatrix}$$

lösen.

(b) Berechnen Sie $b(x^n, x^m)$ und $l(x^n)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und schreiben Sie ein Programm, dass die Lösung von

$$b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \Pi_n$$

bestimmt. Plotten Sie u für verschiedene Werte von n.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 4 werden in der Übung am 14.12.2022 besprochen.