

1. Übungsblatt (erschienen am 19.10.2022)

Aufgabe 1.1 (Theorieaufgabe)

Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und einer Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_n := \varphi(x + h_n) \quad \text{und} \quad \psi_n := \frac{\varphi_n - \varphi}{h_n}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_n \rightarrow \varphi$ und $\psi_n \rightarrow \varphi'$ (in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

Aufgabe 1.2 (Theorieaufgabe)

Betrachten Sie die Funktionen $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon)$ definiert in Beispiel 2.2 der Vorlesung. Gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sodass die Folge $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 1.3 (Theorieaufgabe)

Stetige lineare Funktionale $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *Distributionen*. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$. Für die Anwendung von f auf eine Testfunktion φ schreiben wir $f(\varphi)$ oder $\langle f, \varphi \rangle$.

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: ein lineares Funktional $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig auf \mathcal{D} , falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad (\text{in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ (in } \mathcal{D}\text{)}.$$

Wir definieren die folgenden Funktionale $T_i : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$, durch:

$$\begin{aligned}
 T_1(\varphi) &:= \sum_{j=0}^k D^j \varphi(0) & T_2(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} D^j \varphi(0) \\
 T_3(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) & T_4(\varphi) &:= \max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \\
 T_5(\varphi) &:= \int_0^1 \varphi(x) dx & T_6(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.
 \end{aligned}$$

Welches dieser Funktionale definiert eine Distribution?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 1 werden in der Übung am 02.11.2022 besprochen.