

## 1. Übungsblatt (erschienen am 19.10.2022)

### Aufgabe 1.1 (Theorieaufgabe)

Zu  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und einer Nullfolge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  definieren wir

$$\varphi_n := \varphi(x + h_n) \quad \text{und} \quad \psi_n := \frac{\varphi_n - \varphi}{h_n}.$$

Zeigen Sie, dass  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  und  $\psi_n \rightarrow \varphi'$  (in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ).

### Aufgabe 1.2 (Theorieaufgabe)

Betrachten Sie die Funktionen  $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon)$  definiert in Beispiel 2.2 der Vorlesung. Gibt es ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , sodass die Folge  $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gegen  $\varphi$  konvergiert? Begründen Sie ihre Antwort!

### Aufgabe 1.3 (Theorieaufgabe)

Stetige lineare Funktionale  $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *Distributionen*. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Für die Anwendung von  $f$  auf eine Testfunktion  $\varphi$  schreiben wir  $f(\varphi)$  oder  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: ein lineares Funktional  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig auf  $\mathcal{D}$ , falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad (\text{in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ (in } \mathcal{D}\text{)}.$$

Wir definieren die folgenden Funktionale  $T_i : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , durch:

$$\begin{aligned}
 T_1(\varphi) &:= \sum_{j=0}^k D^j \varphi(0) & T_2(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} D^j \varphi(0) \\
 T_3(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) & T_4(\varphi) &:= \max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \\
 T_5(\varphi) &:= \int_0^1 \varphi(x) \, dx & T_6(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Welches dieser Funktionale definiert eine Distribution?

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu den Aufgaben wird **keine** Abgabe verlangt.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 1 werden in der Übung am 02.11.2022 besprochen.