

Aufgabenblatt 5

1 Induktion

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $12^{2n} - 11^n$ durch 133 teilbar.

2 Bild und Urbild

Sei $f_1, f_2 : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 0, 5 \mapsto 3 \\ f_2 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 1. \end{aligned}$$

- i) Zeichnen Sie Pfeildiagramme zu f_1 und f_2 .
- ii) Berechnen Sie die Bilder und Urbilder von $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{2\}$, $\{0, 3\}$ unter f_1 und f_2 .
- iii) Zeigen Sie: Wenn wir $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ als die ganzen Zahlen modulo 6, also als Reste beim Teilen durch 6, auffassen, dann entspricht f_1 der Multiplikation mit 3 und f_2 der Multiplikation mit 5.

3 Injektivität und Surjektivität

Finden Sie eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ und eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

4 Rechnen mit komplexen Zahlen

Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der folgenden komplexen Zahlen

$$i + 1, 3i, \frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2i}, \frac{1+i}{1-i}, \left| \frac{2+i}{4i} \right|, (2+3i)^2, i^{1011}.$$

5 Quadratische Gleichung

Finden Sie die komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung

$$5x^2 + 4x + \frac{5}{4} = 0.$$
