Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 3

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

10.-14. Oktober 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H8 und H11.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore"(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Wiederholung

Beweisverfahren für $A \Rightarrow B$

Direkter Beweis	$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_l \Rightarrow B$
Kontraposition	Zeige: $\neg B \Rightarrow \neg A$
Widerspruchsbeweise	Zeige: Aus der Annahme $A \wedge \neg B$ folgt ein Widerspruch.

Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform mit Variable in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Angenommen

i) es gilt $A(1)$ und

ii) für alle natürliche Zahlen n gilt:
Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen n.

Plan für heute

- Einführung in die Mengenlehre
- Modulo Rechnen

Naive Mengenlehre nach Cantor

Definition 21

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Für ein Element m von M schreiben wir $m \in M$.

Beispiele:

i) Zahlmengen:

Zahlmengen:	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
	$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

ii) $\{5, \sqrt{2}, 30031, \bigstar\}$ $\{\}$ heißen Mengenklammern.

iii) Menge der Geraden in der Ebene.

iv) Menge der Studierenden in diesem Hörsaal.

Teilmenge und leere Menge

Definition 22

Sein M eine Menge. Eine Menge N heißt Teilmenge von M, in Zeichen $N \subset M$, wenn für alle $n \in N$ gilt $n \in M$.

Insbesondere sind zwei Mengen N und M gleich, $N = M$, wenn $N \subset M$ und $M \subset N$.

Beispiel:

i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
ii) Sei P die Menge der Primzahlen, dann ist $P \subset \mathbb{N}$.
iii) $\{5, \bigstar\} \subset \{5, \sqrt{2}, 30031, \bigstar\}$.

Definition 23

Die Menge, die kein Element enthält, nennen wir leere Menge, in Zeichen $\varnothing$.

Beschreibung von Menge

i) Durch Aufzählung ihrer Elemente: Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es gilt $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

ii) Als Teilmenge einer bekannten Menge durch Angabe einer Auswahleigenschaft: Sei M eine Menge und $A(m)$ eine Aussageform mit Variable $m \in M$. Dann existiert eine Menge

$$\{m \in M \mid A(m)\} \subset M$$

In Worten ist dies die Menge der $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt. Nach dem vertikalen Strich folgt also eine Bedingung die die Elemente dieser Teilmenge erfüllen müssen.

Definition 24

Aussageform auf einer Menge Sei M eine Menge. Eine Aussageform $A(m)$ auf M ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer freien Variable m abhängt und nach Einsetzen eines Wertes für $m \in M$ zu einer Aussage wird.

i) Sei $M = \mathbb{Z}$ und $A(n) =$„n ist gerade “. Dann ist

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid A(n)\} = \text{ Menge der geraden Zahlen.}$$

ii) Sei $M = \mathbb{N}$ und $A(n) =$„$n > 1$ und n hat nur die Teiler ± 1 und $\pm n$.“Dann ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\} = \text{ Menge der Primzahlen.}$$

iii) Sei $M = \mathbb{R}$ und $A(x) =$„$x \geq a$ und $x \leq b$ “mit festen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid A(x)\} = \text{ Das geschlossene Intervall von } a \text{ bis } b.$$

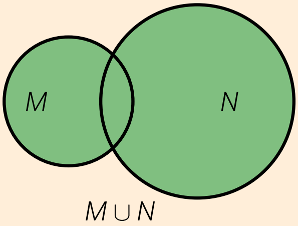
Analog definieren wir

1. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall,
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall,
3. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall.

Definition 25

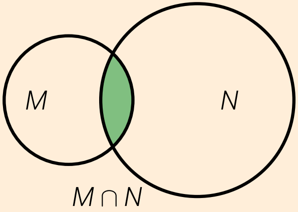
Seien M und N Mengen.
Die Vereinigung von M und N, in Zeichen $M \cup N$, ist definiert als

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$



Der Schnitt von M und N, in Zeichen $M \cap N$, ist definiert als

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \ \wedge x \in N\}$$



Falls $M \cap N = \varnothing$, bezeichnen wir M und N als disjunkt.

i) $M = \{1,2\}, N = \{2,3\}$. Dann $M \cup N = \{1,2,3\}$ und $M \cap N = \{2\}$.

ii) Sei M eine Menge. Dann $M \cup \varnothing = M$ und $M \cap \varnothing = \varnothing$. Verhält sich wie 0 in $\mathbb{Z}$.

iii) Sei M eine Menge. Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Aussageformen mit Variable in M und sei

$$M_A = \{m \in M \mid A(m)\} \quad \text{sowie} \quad M_B = \{m \in M \mid B(m)\}.$$

Dann ist

$$M_A \cup M_B = \{m \in M \mid A(m) \vee B(m)\}, \quad M_A \cap M_B = \{m \in M \mid A(m) \wedge B(m)\}.$$

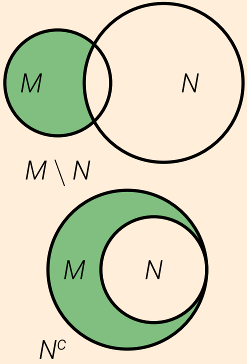
iv) $\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{N}$
$\mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq 0\} = \mathbb{Z}$.

Definition 26

Seien M und N Mengen.
Die Differenz $M \setminus N$, gesprochen „M ohne N“, ist definiert als

$$M \setminus N = \{m \in M \mid m \notin N\} \subset M.$$

Falls $N \subset M$, bezeichnen wir $M \setminus N$ als das Komplement von N in M und schreiben kurz N^c.



Beispiele:

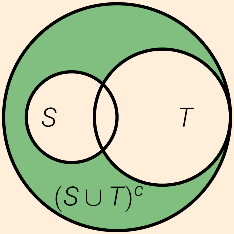
i) Sei $M = \{1, 2\}, N = \{2, 3\}$. Dann $M \setminus N = \{1\}$ und $N \setminus M = \{3\}$.
ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}^c =$ Menge der irrationalen Zahlen.
iii) Sei $G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\} \Rightarrow G^c =$ Menge der ungeraden Zahlen.

demorgansche Regel für Mengen

Lemma 27

Sei M eine Menge und $S, T \subset M$ Teilmengen, dann gilt

i) $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$.
ii) $(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$.



Beweis.

i) Sei $x \in M$. Dann gilt $x \in S \cup T$ genau dann, wenn $x \in S$ oder $x \in T$. Bezeichne mit $A(x)$ die Aussageform auf M „$x \in S$"und mit $B(x)$ die Aussageform auf M „$x \in T$". Dann ist $x \in S \cup T$ genau dann wenn $A(x) \vee B(x)$. Also ist $x \in (S \cup T)^c$ genau dann wenn

$$\neg(A(x) \vee B(x)) \quad \overset{\text{deMorgan}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg A(x) \wedge \neg B(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \notin S \wedge x \notin T$$

$$\Leftrightarrow x \in S^c \wedge x \in T^c \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} x \in S^c \cap T^c.$$

ii) Sei $x \in M$. Dann gilt $x \in S \cap T$ genau dann, wenn $A(x)$ und $B(x)$ mit den Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ wie zuvor. Also ist $x \in (S \cap T)^c$ genau dann, wenn

$$\neg(A(x) \wedge B(x)) \quad \overset{\text{deMorgan}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg A(x) \vee \neg B(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \notin S \vee x \notin T$$

$$\Leftrightarrow x \in S^c \vee x \in T^c \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} x \in S^c \cup T^c.$$

$\square$

Lemma 28 (Teilen mit Rest)

Sei $n, m \in \mathbb{Z}$ *und* $m > 1$*, dann existiert ein* $k \in \mathbb{Z}$ *und ein* $r \in \{0, \ldots, m-1\}$*, sodass*

$$n = km + r.$$

Beweis.

Definiere $k \in \mathbb{Z}$ als die größte ganze Zahl, sodass $mk \leq n$. Existiert da n eine obere Schranke. Dann ist $r := n - mk \in \{0, \ldots, m-1\}$. □

Definition 29

In der Situation des obigen Lemmas bezeichnen wir r als den Rest von n beim Teilen durch m und schreiben kurz $r = n \mod m$ ("n modulo m").

Modulo Rechnen

Beispiel: $10 \mod 3 = 1, \quad 10 \mod 11 = 10, \quad 10 \mod 5 = 0.$

Nach Definition gilt: $n = 0 \mod m$ genau, dann wenn $m|n$.

Lemma 30

Seien $n_1, \ldots, n_4 \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass

$$n_1 = n_2 \mod m \quad \textit{und} \quad n_3 = n_4 \mod m,$$

dann ist

i) $n_1 + n_3 \mod m = n_2 + n_4 \mod m.$

ii) $n_1 n_3 \mod m = n_2 n_4 \mod m.$

Beispiel: $37 + 65 \mod 3 = 1 + 2 \mod 3 = 0 \mod 3 \quad \Rightarrow 3 \mid 37 + 65.$

Beweis von Lemma 30.

Seien $k_i \in \mathbb{Z}$ und $r_i \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $n_i = k_i m + r_i$. Nach Voraussetzung ist $r_1 = r_2$ und $r_3 = r_4$.

i) Es ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_3)m + r_1 + r_3$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4)m + r_1 + r_3$. Dann existiert $k \in \{0, 1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 + r_2 = km + r$. Also ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_2 + k)m + r$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4 + k)m + r$. Insbesondere stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.

ii) Es ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3)m + r_1 r_3$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4)m + r_2 r_4$. Dann existiert $k \in \{0, \dots, m-1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 r_2 = km + r$. Dann ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3 + k)m + r$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4 + k)m + r$. Damit stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.

$\square$

Dezimaldarstellung und Quersumme

Dezimaldarstellung ganzer Zahlen. Es ist eine Konvention in unserer Gesellschaft Zahlen aufzuschreiben. So ist

$$657 = 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Allgemeiner meint eine Dezimaldarstellung

$$n_k \dots n_0 = n_k \cdot 10^k + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$$

Definition 31

Die Quersumme einer ganzen Zahl n mit Dezimaldarstellung $n_k \dots n_0$ ist

$$n_k + \dots + n_0.$$

Satz 32

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Quersumme von m ist durch 3 teilbar genau dann, wenn n durch 3 teilbar ist.

Beweis.

Sei $n = n_k \dots n_0$ in Dezimaldarstellung. Wir verwenden Lemma 30 und dass $10 = 1 \mod 3$. Dann ist

$$n \mod 3 = n_k \cdot 10^k + \cdots + n_1 \cdot 10 + n_0 \mod 3 = n_k \cdot 1 + \cdots + n_1 \cdot 1 \mod 3.$$

Der letzte Ausdruck ist die Quersumme. Also gilt

$$\begin{aligned} 3 \mid n \quad &\Leftrightarrow n = 0 \mod 3 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Quersumme} = 0 \mod 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 \mid \text{Quersumme}. \end{aligned}$$

□