Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
WS 2022/23
11. Oktober 2022

Vorkurs Mathematik
Dr. Johannes Horn

Aufgabenblatt 2

1 Indirekte Beweismethoden

i) Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass keine ganzen Zahlen n, m existieren, sodass $18m + 6n = 1$.

ii) Sei r eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit Kontraposition: Wenn r irrational ist, dann auch $\sqrt{r}$.

iii) Sei n eine ganze Zahl. Zeigen Sie: $11n - 7$ ist gerade genau dann, wenn n ungerade ist. Welche Beweismethoden haben Sie verwendet?

2 Induktion - Summe

Zeigen Sie: Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die Summe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

3 Induktion - Teilbarkeit

Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

4 Induktion - Geometrie

Sei n eine natürliche Zahl. Finden Sie eine Formel für die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks. Beweisen Sie diese mittels Induktion.

5 *Euklidzahlen

Sei n eine natürliche Zahl. Definiere die n-te Euklidzahl als das Produkt der ersten n aufeinanderfolgenden Primzahlen plus 1, d.h.

$$e_n = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Die Zahlenfolge startet wie folgt: $e_1 = 3, e_2 = 7, e_3 = 31$.

i) Was sagt der Beweis von Satz 16 über e_n?

ii) Was ist die letzte Ziffer von e_n für $n \geq 3$ in der Dezimaldarstellung?

iii) Sind alle Euklidzahlen Primzahlen?

Es ist ein offenes Problem, ob es unendlich viele Euklidzahlen gibt, die Primzahlen sind.