Übungszettel 3b - Relationen und Funktionen mathematische Beweise

Aufgabe 1: Eigenschaften von Funktionen

Entscheide für jede Funktion, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = |x|$

(d) $i\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $i(n) = \log_2(n)$

(e) $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $j(n) = 2^n$

(f) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k(x) = x^2$

(g) $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l(x) = 1/e^x$

(h) $m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $m(x) = 2x - 1001$

Solution:

(a) surj.

(b) nix

(c) surj.

(d) inj.

(e) inj.

(f) surj.

(g) inj.

(h) injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv

Aufgabe 2: Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine 2-stellige Relation R auf einer Menge M, sodass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $(x, x) \in R$. (Reflexivität)
2. Wenn $(x, y) \in R$, dann ist auch $(y, x) \in R$. (Symmetrie)
3. Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$. (Transitivität)

(a) Weise nach, dass $R_1 := \{(x, y) \mid x = y\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

(b) Ist $R_2 := \{(x, y) \mid x \leq y\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$?

(c) Wie sieht es aus mit $R_3 := \{(x, y) \mid x \text{ versteht sich mit } y\}$ auf der Menge aller Menschen? (Ihr dürft diskutieren!)

Solution: Ich habe in der Vorlesung nicht über diese Eigenschaften (Reflexivität, Transitivität, etc) gesprochen und dazu steht auch nichts im Skript. Allerdings sind die Eigenschaften ja in der Aufgabenstellung definiert, also sollte die Aufgabe für ambitionierte Teilnehmende auch lösbar sein.

(a) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x = x$, also $(x, x) \in R_1$. $\Rightarrow$ Reflexivität

Wenn $x = y$, dann ist auch $y = x$. Also: Wenn $(x, y) \in R_1$, dann ist auch $(y, x) \in R_1$. $\Rightarrow$ Symmetrie

Wenn $x = y$ und $y = z$ gilt, dann gilt auch $x = z$. Also: Wenn $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_1$, dann ist auch $(x, z) \in R_1$. $\Rightarrow$ Transitivität

(b) Nein, das ist keine Äquivalenzrelation, da die Symmetrie nicht erfüllt ist: Z.B. ist $4 \leq 5$, demnach also $(4, 5) \in R_2$. Aber es gilt nicht $5 \leq 4$, also ist $(5, 4) \notin R$.

(c) Auch das ist keine Äquivalenzrelation, da die Transitivität nicht erfüllt ist (Über Reflexivität lässt sich streiten).

Wenn sich Person x mit Person y versteht und y sich auch gut mit Person z versteht, müssen sich x und z noch lange nicht verstehen. (Man suche sich ein Gegenbeispiel in Verwandt- oder Bekanntschaft.)

Aufgabe 3: Umkehrfunktion

Sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive Funktion. Die Funktion $f^{-1}\colon Y \to X$, gegeben durch $f^{-1}(y) :=$ dasjenige $x \in X$ mit $f(x) = y$, heißt **Umkehrfunktion** von f.

(a) Ist die Umkehrfunktion eine Funktion? (Warum?)

(b) Zeige: Wenn f bijektiv ist, so ist auch f^{-1} bijektiv.

(c) Warum haben wir die Umkehrfunktion nur für bijektive Funktionen definiert?

Solution: Für diese Aufgabe kann es sehr hilfreich sein, sich f in einem Schaubild (vergl. Aufgabe 3, Zettel 3a) aufzumalen.

(a) Ja (jedem Element aus Y wird ein Element aus X zugeordnet)

(b) injektiv und surjektiv nachprüfen, z.B. an dem Schaubild, wenn eins gezeichnet wurde. Ein formaler Beweis ist an dieser Stelle nicht verlangt, darf aber natürlich gemacht werden.

(c) wenn nicht bijektiv, dann nicht surjektiv oder nicht injektiv. Dann können wir nicht auf diese Weise umkehren, weil wir nicht jedem Element etwas zuordnen ($f(x)$ nicht surjektiv) bzw. einem Element mehrere zuordnen ($f(x)$ nicht injektiv) würden. Beides sind keine Funktionen.

Aufgabe 4: Die Magische Zahl $z = p^2 - 1$

Beweise: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

(a) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 3 teilbar.

(b) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 2 teilbar.

(c) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 4 teilbar.

(d) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Hinweis: $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$

Solution:

Wichtig ist, dass einem auffällt, dass $z = p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ ist.

(a) Zunächst stellen wir fest, dass $(p-1), p$ und $(p+1)$ drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind. Da von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine durch 3 teilbar sein muss, und da p eine Primzahl ≥ 5 ist und somit nicht durch 3 teilbar sein kann, muss entweder $(p-1)$ oder $(p+1)$ durch drei teilbar sein.

$\square$

(b) Weiterhin ist p eine Primzahl, die größer als 5 ist, und somit mit Sicherheit eine ungerade Zahl. (Ansonsten wäre sie durch zwei teilbar und somit keine Primzahl.) Somit müssen $(p-1)$ und $(p+1)$ gerade und durch zwei teilbar sein.

$\square$

(c) Da eine von zwei aufeinander folgenden geraden Zahl durch 4 teilbar ist, muss entweder $(p-1)$ oder $(p+1)$ durch vier teilbar sein.

$\square$

(d) Insgesamt ist also von beiden Teilern $(p-1)$ und $(p+1)$ von z einer durch 3, einer durch 2 und der andere durch 4 teilbar. Damit ist z als Produkt von $(p-1)$ und $(p+1)$ wie behauptet durch $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ teilbar.

$\square$

Aufgabe 5: Beweis Mengen

Beweise: *Seien M und N Mengen. Es gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$ genau dann, wenn M und N disjunkt sind.*

Solution:

Seien M und N Mengen.
„$\Rightarrow$“: Es gelte $|M \cup N| = |M| + |N|$. Zu zeigen ist, dass dann M und N disjunkt sind.
Dazu führen wir einen Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, M und N sind nicht disjunkt. Dann ist $M \cap N \neq \emptyset$. Sei also $a \in M \cap N$. Dann zählt a einmal in $|M|$ und einmal in $|N|$. Also trägt a genau 2 zu $|M| + |N|$ bei, während a nur 1 zu $|M \cup N|$ beiträgt.
Jedes Element in $M \setminus N$ trägt 1 zu $|M| + |N|$ bei und ebenso 1 zu $|M \cup N|$. Dasselbe gilt für jedes Element in $N \setminus M$.
Somit gilt also:
$|M| + |N| > |M \cup N|$ und insbesondere $|M| + |N| \neq |M \cup N|$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Also sind M und N disjunkt.

„$\Leftarrow$ “: Sei $M \cap N = \emptyset$. Wir zeigen:

1. $|M \cup N| \geq |M| + |N|$ und
2. $|M| + |N| \geq |M \cup N|$.

Zu 1): Sei $a \in M \cup N$. Dann zählt a einmal in $|M \cup N|$. Nach Definition der Vereinigung ist $a \in M$ oder $a \in N$. Also wird a in $|M|$ oder in $|N|$ gezählt. Somit gilt $|M \cup N| \leq |M| + |N|$.
Zu 2): Sei $a \in M$. Da M und N disjunkt sind, ist $a \notin N$. Also trägt a genau 1 zu $|M| + |N|$ bei. Nach Definition der Vereinigung ist $a \in M \cup N$. Also wird a in $|M \cup N|$ auch einmal gezählt. Das gleiche gilt auch für $b \in N$ und somit gilt $|M| + |N| \leq |M \cup N|$. $\square$

Aufgabe 6: Direkter Beweis durch Umformen

Zeige durch Umformen, dass für $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Solution:

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Leftrightarrow (1 + x + x^2 + \cdots x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

Also:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + \cdots x^n)(1 - x) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots x^n + x^{n+1}) \\ &= 1 + x - x + x^2 - x^2 + \cdots x^n - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Viel Erfolg!