GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 13.01.2021)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass jedes homogene, harmonische Polynom $H_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als

$$H_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=0}^{n} x_3^j A_{n-j}(x_1, x_2)$$

mit $A_{n-j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, ist ein homogenes Polynom vom Grad $n - j$, das folgende Rekursionsrelation erfüllt

$$A_{n-j}(x_1, x_2) = -\frac{1}{j(j-1)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 \right) A_{n-j+2}(x_1, x_2)$$

für $j = 2, \ldots, n$.

(b) Verwenden Sie Teil **(a)** um zu beweisen, dass

$$\dim \left(\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^3) \right) = 2n + 1.$$

Aufgabe 5.2 (Schriftliche Aufgabe)

Sei Σ eine reguläre Fläche und $P_1, P_2 : C^{(0)}(\Sigma) \to C^{(0)}(\Sigma)$ die Operatoren des Einfach- und Doppelschicht-Potentials, d.h. für $F \in C^{(0)}(\Sigma)$ gilt

$$P_1 F = \int_\Sigma \frac{1}{|\cdot - y|} F(y)\, d\omega(y),$$
$$P_2 F = \int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|\cdot - y|} \right) F(y)\, d\omega(y).$$

Zeigen Sie, dass diese Operatoren beschränkt bzgl. der $L^2(\Sigma)$-Norm

$$\|F\|_{L^2(\Sigma)} = \left(\int_\Sigma |F(x)|^2 \, d\omega(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

sind.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die eingescannte Abgabe soll als PDF-Datei bis zum 25.01.2021 um 12:00 Uhr an Ihre Übungsleiterin geschickt werden. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe zur Einführung in die Potentialtheorie* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 5 werden in der Übung (via Zoom) am 27.01.2021 besprochen.