GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 18.11.2020)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $U \in C^{(0)}(G)$ besitze die Eigenschaften des Gaußschen Mittelwert-Satzes, d.h. für jedes $x_0 \in G$ und $R > 0$ mit $\overline{B_R(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leq R\} \subseteq G$ erfülle die Funktion U

$$U(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-x_0|=R} U(x)\, d\omega(x)$$

oder

$$U(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|x-x_0|\leq R} U(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen U harmonisch in G ist.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $(U_k)_{k=0,1,\ldots}$ eine Folge von Funktionen, die harmonisch in G sind.

(a) Beweisen Sie, dass wenn $\lim_{k\to\infty} U_k(x)$ gleichmäßig gegen $U(x)$ auf jeder Kugel $\overline{B_R(x_0)} \subseteq G$ konvergiert, U harmonisch in G ist.

(b) Angenommen, die Funktionen U_k, $k = 0, 1, \ldots$, sind stetig auf $\overline{G}$ und konvergieren gleichmäßig auf ∂G. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmäßig auf $\overline{G}$ konvergiert und, dass ihr Grenzwert harmonisch ist.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)
Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, Σ_{ext} der Außenraum und $F \in C^{(0)}(\Sigma)$. Zeigen Sie, dass die Lösung $U \in C^{(2)}(\Sigma_{ext}) \cap C^{(0)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ zu dem Problem

$$\begin{aligned}
\Delta U &= 0 \quad \text{in } \Sigma_{ext},\\
|U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to \infty,\\
|\nabla U(x)| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty,\\
U^+(x) &= F(x),
\end{aligned}$$

wobei $U^+(x) = \lim_{\tau\to 0} U(x + \tau\nu(x))$, $x \in \Sigma$,

eindeutig ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden. Die eingescannte Abgabe soll als PDF-Datei bis zum 30.11.2020 um 12:00 Uhr an Ihre Übungsleiterin geschickt werden. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe zur Einführung in die Potentialtheorie* an.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in der Übung (via Zoom) am 02.12.2020 besprochen.