Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
10. Juli 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass:
$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n}=\log(N)+C+O(\frac{1}{N}).$$

(b) Beweisen Sie, dass:
$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s}=\frac{N^{1-s}}{1-s}+\zeta(s)+O(N^{-s})$$
für alle $s>0$, $s\neq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie die Euler'sche Summationsformel:
$$\sum_{y<n\leq x}f(n)=\int_y^x f(t)\mathrm{d}t+\int_y^x(t-\lfloor t\rfloor)f'(t)\mathrm{d}t+f(x)(\lfloor x\rfloor-x)-f(y)(\lfloor y\rfloor-y)$$
wobei f' stetig in $[y,x]$ ist und $\lfloor t\rfloor$ die grössest ganzen Zahl $\leq t$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei A eine Algebra über einem Körper K. Eine Derivation D ist eine K-lineare Abbildung $D: A\to A$, so dass
$$D(ab)=D(a)b+aD(b).$$

(a) Sei A eine endlich erzeugte K-Algebra mit Erzeugern $x_1,\dots,x_n$. Beweisen Sie, dass D durch die Werte $D(x_1),\dots,D(x_n)$ eindeutig bestimmt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Derivationen $\mathrm{Der}_K(A)$ ein A-Modul ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $D:\mathrm{Q}M_*\to\mathrm{Q}M_*$ und $H:\mathrm{Q}M_*\to\mathrm{Q}M_*$ aus der Vorlesung Derivationen sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir definieren die Γ-Funktion als
$$\Gamma(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^s\frac{\mathrm{d}t}{t},\quad s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1)=1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ für $\mathrm{Re}(s)>1$.

(d) Beweisen Sie, dass sich Γ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen an jeder nicht-positiven ganzen Zahl fortsetzen lässt und dass die Residuen

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Mellin-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$g(s) := \int_0^\infty f(t) t^s \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ für die das Integral absolut konvergiert.

(a) Beweisen Sie, dass die Mellin-Transformierte von $\frac{1}{2}(\theta(it) - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t}$ für $t > 0$ durch

$$g(s) = \xi(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s), \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$$

gegeben ist.

(b) Benutzen Sie ohne Beweis, dass sich $\xi(s)$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $s = 0$ und $s = 1$ mit Residuen -1 und 1 fortsetzen lässt. Beweisen Sie, dass die Riemann'sche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ sich meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $s = 1$ mit Residuum 1 und einfachen Polen in $s = -2, -4, -6, \ldots$ fortsetzen lässt.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 19. Juli**.