Lineare Algebra zur Sekundarstufe I

Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 04.07.2019

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Gegeben seien folgende Elemente von $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und folgende Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^4$

$$W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob v_1, v_2, v_3, v_4 Elemente von W sind.

(b) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig?

(c) Bilden v_1, v_2, v_3, v_4 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$?

(d) Ist $v_1 + v_2, v_2, v_3, v_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

Übung 2 (4 Punkte)
Gegeben seien Matrizen

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}, \; B = (b_{kl})_{k=1,\dots,n}^{l=1,\dots,r}.$$

Dann definiert man deren Produkt als

$$AB := (c_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,r} \text{ mit } c_{ij} := \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Berechnen Sie folgende Produkte von Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Übung 3 (4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und folgende lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto (x_1 + 2x_2 - 3x_3)v_1 + (2x_1 - x_2 + 5x_3)v_2 \,.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Multiplikation von A und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ hier durch Matrizenmultiplikation (siehe Aufgabe 2) gegeben sei.

Übung 4 (4 Punkte)

Gegeben Sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} .$$

Wir definieren die Determinante von A als

$$\det(A) := x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \,.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Berechnen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) Sei $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 4 & t \end{pmatrix}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det(M) = 0$?

Dieses Blatt ist zur eigenen Übung gedacht und wird nicht abgegeben oder korrigiert.