Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 18.04.2019

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei $S = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$. Entscheiden Sie, ob $S \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ eine affine Varietät ist. Beantworten sie dieselbe Frage über dem Körper $\mathbb{F}_{17}$.

Übung 2 (4 Punkte)
Seien $V \subset \mathbb{A}^n_k$ und $W \subset \mathbb{A}^m_k$ affine Varietäten über dem Körper k. Wir definieren deren kartesisches Produkt als

$$V \times W = \{(a,b) \in \mathbb{A}^{n+m}_k \mid a \in V, b \in W\} \subset \mathbb{A}^{n+m}_k.$$

Zeigen Sie, dass $V \times W \subset \mathbb{A}^{n+m}_k$ eine affine Varietät ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, der *nicht* algebraisch abgeschlossen ist und sei $X = V(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{A}^n_k$ eine affine Varietät, die durch endlich viele Gleichungen gegeben ist. Zeigen Sie, dass X die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper und $C = \{(t, t^3, t^4) \mid t \in k\} \subset \mathbb{A}^3_k$. Zeigen Sie, dass C eine algebraische Varietät ist und bestimmen Sie deren Verschwindungsideal.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Beschreiben Sie die Nullstellenmengen der folgenden Ideale:

(a) $(xy, xz, yz) \subset k[x,y,z]$

(b) das Ideal erzeugt durch alle quadratfreien Monome von Grad d in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper k, wobei $1 \le d \le n$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6
Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und sei d der größte x_i Grad von f für $0 \le i \le n$. Zeigen Sie, dass f genau dann das Nullpolynom ist, wenn $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ mit $1 \le a_i \le d+1$ für alle $1 \le i \le n$.

Übung 7
Ist die Menge $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten eine affine Varietät?

Übung 8
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Beliebige Vereinigungen affiner Varietäten sind affine Varietäten.

(b) Das Komplement einer affinen Varietät ist eine affine Varietät.

(c) Die mengentheoretische Differenz zweier affiner Varietäten ist eine affine Varietät.

Übung 9
Seien $V, W \subset \mathbb{A}^n_k$ affine Varietäten. Zeigen Sie:

(a) $V \subset W$ genau dann, wenn $I(V) \supset I(W)$

(b) $V = W$ genau dann, wenn $I(V) = I(W)$.

Übung 10
Zeigen Sie, dass für alle Ideale I in R das Ideal $\sqrt{I}$ ein Radikalideal ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 23.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.