Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 30.05.2016
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Beim Schlangenlemma (siehe Präsenzaufgabe) betrachte man den Fall, dass i injektiv und q surketiv sind. Zeigen Sie, dass es dann die von i und q induzierten Homomorphismen ebenfalls sind.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen. Für einen einen S-Modul N und $a \in R, x \in N$ definiert man $ax := f(a)x$, wodurch N eine R-Modul Struktur erhält. Sei nun N ein endlich erzeugter S-Modul und S als R-Modul endlich erzeugt. Zeigen Sie, das dann N als R-Modul endlich erzeugt ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Seien V, W k-Vektorräume. Geben Sie eine Basis des Tensorprodukts $V \otimes_k W$ an.

Übung 4 Zeigen Sie: für k-Vektorräume V, W gibt es einen (natürlichen) Isomorphismus $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$. Man definiert den Rang eines Elements $x \in V^* \otimes W$ als die Anzahl der in x auftrenden reinen Tensoren (also hat $x = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i, a_i \in V^*, b_i \in W$ den Rang r). Zeigen Sie, dass der Rang einer linearen Abbildung in $\mathrm{Hom}(V, W)$ gleich dem Rang ihres Bildes in $V^* \otimes W$ ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Beweisen Sie das Schlangenlemma: Sei R ein Ring und sei

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \xrightarrow{p} & 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N'' & &
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Dann gilt

1. Definiert man für $x \in p^{-1}(\ker(f''))$

$$\delta(p(x)) = [f(x)] \in N/f'(M')$$

so erhält man einen R-Modulhomomorphismus

$$\delta : \ker(f'') \to \mathrm{Coker}(f').$$

2. Die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\ker(f') \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \ker(f) \arrow[r, "\mathrm{p}"] & \ker(f'') \arrow[dll, "\delta"] \\
\mathrm{Coker}(f') \arrow[r, "\mathrm{j}"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "\mathrm{q}"] & \mathrm{Coker}(f'')
\end{tikzcd}$$

ist exakt, wobei i, p, j, q die von den Abbildungen mit den gleichen Buchstaben induzierten Abbildungen bezeichne.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6
Seien $M_1, \ldots, M_r$ R-Moduln. Zeigen Sie: es existiert eine Paar (T, j) aus einem R-Modul T und einer multilinearen Abbildung $j : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jeden R-Modul P und jede R-multilineare Abbildung $f : M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ existiert ein eindeutiger R-Homomorphismus $f' : T \to P$, sodass $f' \circ j = f$. Zeigen Sie weiterhin, dass T eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

Übung 7
Seien M, N, P R-Moduln. Man beweise, dass dann eindeutige Isomorphismen

1. $M \otimes N \to N \otimes M$
2. $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$
3. $(M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$
4. $A \otimes M \to M$

existieren, sodass

1. $x \otimes y \mapsto y \otimes x$
2. $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$
3. $(x, y) \otimes z \to (x \otimes z), (y \otimes z)$
4. $a \otimes x \to ax$

.

Übung 8
Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass $S \otimes_R M$ aufgefasst als S-Modul endlich erzeugt ist.

Übung 9
Seien R, S Ringe, M ein R-Modul, P ein S-Modul und N ein (R, S)-Bimodul, das heißt N ist gleichzeitig R- und S-Modul und $a(xb) = (ax)b$ für alle $a \in R, b \in S, x \in N$. Dann ist $M \otimes_R N$ ein S-Modul, $N \otimes_S P$ ein R-Modul. Zeigen Sie:

$$(M \otimes_R N) \otimes_S P \cong M \otimes_R (N \otimes_S P).$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 06.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.