Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 13.06.2016
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei $F : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und M ein flacher A-Modul. Zeigen Sie, dass dann $M_B := B \otimes_A M$ ein flacher B-Modul ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Seien X, Y irreduzible affine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Zeigen Sie, dass dann $X \times Y$ irreduzibel ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei M ein A-Modul und seien N, P Untermoduln von M. Zeigen Sie:

1. $S^{-1}(N + P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$
2. $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$
3. $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ als $S^{-1}A$-Moduln.

Übung 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Lokalisierung:
Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines Rings R. Dann existiert für jeden Ringhomomorphismus $\alpha : R \to T$ in einen anderen Ring T mit der Eigenschaft $\alpha(S) \subset T^\times$ ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\varphi : S^{-1}R \to T$, sodass $\varphi(r/1) = \alpha(r)$ für alle $r \in R$.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Überlegen Sie sich die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts zweier Algebren und beweisen Sie sie.

Übung 6
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien X, Y affine Varietäten über k.
Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des Produkts von Varietäten:
Seien $f : Z \to X, g : Z \to Y$ Morphismen affiner algebraischer Varietäten. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : Z \to X \times Y$ mit $f = pr_1 \circ h$ und $g = pr_2 \circ h$, wobei pr_i die Projektion auf die i-te Komponente sei.
Zeigen Sie weiterhin: $k[X \times Y] \cong k[X] \otimes_k k[Y]$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7
Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie: $S^{-1}R$ ist flach als R-Modul.

Übung 8
Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines Rings R und seien $I, J \subset R$ Ideale. Zeigen Sie

$$S^{-1}(I : J) = (S^{-1}I : S^{-1}J),$$

falls J endlich erzeugt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 20.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.