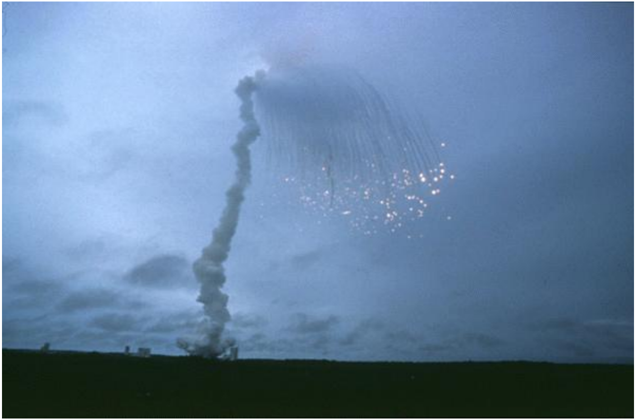
Beweistechniken

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2023/24
Ronja Düffel

25. September 2023

Wozu Beweise in der Informatik?



Quelle:http://www.capcomespace.net

Wozu Beweise in der Informatik?

... um Aussagen wie

1. "Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe."
2. "Das Programm führt zu keiner Endlosschleife."
3. "Zur Lösung dieser Art von Problemen gibt es kein Patentrezept."

auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

Negation zusammengesetzter Aussagen

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage	negierte Aussage
Das Haus ist groß und alt.	Das Haus ist nicht groß oder nicht alt.
Das Auto ist rot oder blau.	Das Auto ist nicht rot und nicht blau.
Alle Kinder spielen gern.	Es gibt (mindestens) ein Kind, das nicht gerne spielt.
Es gibt blaue Elefanten.	Alle Elefanten sind nicht blau.

Merksatz: Negation vertauscht „und“ mit „oder“ und „Für alle“ mit „Es gibt“.

Warum ist Beweisen so schwierig?

- unsere natürliche Sprache ist oft mehrdeutig
- wir sind in unserem Alltag von logischen Fehlschlüssen umgeben
- Logik hilft beim Argumentieren und Aufschreiben von Beweisen
- beim *Finden* von Beweisen helfen:
  - **Erfahrung**
  - Problemlösungsstrategien
  - Kenntnis typischer Beweismuster

Beweis

Definition (Beweis)

Ein Beweis ist eine **logisch vollständige Begründung** *einer Aussage.*

Solange eine Aussage nicht bewiesen ist, kann es sein, dass sie falsch ist. Egal durch wie viele Beispiele sie gestützt wird.

FERMAT-Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Vermutung (1637): Alle F_n sind Primzahlen

Widerlegt (1732) von EULER: $F_5 = 4294967297$ ist durch 641 teilbar

Drei Beweistechniken

1. direkter Beweis
2. Beweis durch Kontraposition
3. Beweis durch Widerspruch

Direkter Beweis

Behauptungen wie

- Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.
- Die Summe zweier gerader Zahlen, ist gerade.
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
- ...

lassen sich durch die Methode des direkten Beweises zeigen.

Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukzessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.
Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$p$$
$$\downarrow$$
logische Schlussfolgerungen
$$\downarrow$$
$$q$$

Was brauchen wir?

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Definition (gerade Zahl)

Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.

Definition (Teilbarkeit)

Eine Zahl a ist genau dann durch eine Zahl $b \neq 0$ teilbar, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = b \cdot k$.

Beweis: Beispiel

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und a, b gerade. Dann sind a und b durch 2 teilbar.

Dann gilt: $a = 2 \cdot l$ und $b = 2 \cdot k$ für $l, k \in \mathbb{Z}$.

Somit gilt: $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k$.

Sei $m = l + k$, dann gilt: $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k = 2 \cdot m$ und $m \in \mathbb{Z}$

Somit ist $a + b$ durch 2 teilbar und damit gerade.

$\square$

Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Für alle ganzen Zahlen a gilt: Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Problem: Es bietet sich kein direkter Beweis an.

Lösung: *Beweis durch Kontraposition*

Zurück zur Wahrheitstafel...

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Fazit

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Beispiel (Planet Zutan)

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.
$\equiv$*Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Beispiel

Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Aussage	Negation
a^2 ist eine gerade Zahl. a ist eine gerade Zahl.	a^2 ist eine ungerade Zahl. a ist eine ungerade Zahl.

Wir zeigen also:

Satz

Wenn a ungerade ist, ist auch a^2 ungerade.

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Satz

Wenn a ungerade ist, ist auch a^2 ungerade.

Beweis:

Sei a eine beliebige **ungerade** Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k + 1$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = (2 \cdot k + 1)^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2 + 2 \cdot 2 \cdot k \cdot 1 + 1$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ mit $l = 2 \cdot k^2 + 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ für eine ganze Zahl l

$\Longrightarrow$ a^2 ist ungerade.

$\square$

Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

Satz (1)

Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

Satz (2)

Wenn a ungerade ist, dann ist a^2 ebenfalls ungerade.

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

Beispiel

$\sqrt{2}$ ist irrational. ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Problem: Wo sind Voraussetzung p und Folgerung q?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational. ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$)
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

$\sqrt{2}$ ist irrational, Beweis durch Widerspruch

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd, d.h. $\text{ggT}(a, b) = 1$

$\Longrightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow 2 \cdot b^2 = a^2$

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, da $b^2 \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ a ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ $2 \cdot b^2 = (2 \cdot k)^2$

$\Longrightarrow$ b^2 ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ b ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ 2 teilt sowohl a, als auch b

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu a und b sind teilerfremd.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational

$\square$

Beweistechniken

- direkter Beweis
  $p \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow q$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg q \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \neg p$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg p \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow$ Widerspruch (Falsche Aussage)

Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$)
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.

Fragen?

?