Übungszettel 5b - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Rekursion

Betrachte die folgende rekursive Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N} \\ f(1) &= 2 \\ f(n) &= f(n-1) + n^2 - n \end{aligned}$$

(a) Werte die Funktion an $f(5)$ aus.

(b) Klassifiziere den Basis- und den Rekursionsfall.

(c) Notiere eine gleiche Funktion $g : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ in nicht rekursiver Form unter Verwendung des Summen- oder des Produktzeichens.

(d) Beweise, dass die beiden Funktionen gleich sind.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4) + 5^2 - 5 \\ &= f(3) + 4^2 - 4 + 5^2 - 5 \\ &= f(2) + 3^2 - 3 + 4^2 - 4 + 5^2 - 5 \\ &= f(1) + 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + 4^2 - 4 + 5^2 - 5 \\ &= 2 + 4 - 2 + 9 - 3 + 16 - 4 + 25 - 5 \\ &= 42 \end{aligned}$$

(b) Basisfall: $f(1) = 2$
Rekursionsfall: $f(n) = f(n-1) + n^2 - n$

(c)

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N} \\ g(1) &= 2 \\ g(n) &= 2 + \sum_{i=2}^{n} i^2 - i \end{aligned}$$

Anmerkung: $g(n) = 2 + \sum_{i=2}^{n} i^2 - i$ ist wegen der leeren Summe ausreichend!!

(d) Schwierig aber machbar. Wenn sie sich an die Gleichheit von Funktionen erinnern (Skript S. 121, Definition 10.5), muss man natürlich zuerst sagen, dass Definitionsbereich $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ und Bildbereich $\mathbb{N}$ der Funktionen gleich sind.

Induktionsverankerung:

$n = 1:$

$$f(1) = 2 = g(1)$$

laut Definition.

Wer dem nicht traut kann es auch noch für $n = 2$ rechnen:

$$f(2) = f(1) + 2^2 - 2 = 2 + 2^2 - 2 = 2 + \sum_{i=2}^{2} i^2 - i = g(2)$$

Induktionsannahme:
Für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (bzw. 2, wenn in der Induktionsverankerung die Behauptung **auch** für $n = 2$ gezeigt wurde) gilt:

$$f(n) = g(n)$$

Induktionsbehauptung:
$n \to n + 1$
z.zg: $f(n + 1) = g(n + 1)$

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= f(n) + (n+1)^2 - (n+1) && \text{Definition} \\
&= (2 + \sum_{i=2}^{n} i^2 - i) + (n+1)^2 - (n+1) && \text{Induktionsvoraussetzung } f(n) \\
&= 2 + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \cdots + (n^2 - n) + ((n+1)^2 - (n+1)) && \text{Summe ausschreiben} \\
&= 2 + \sum_{i=2}^{n+1} i^2 - i \\
&= g(n+1)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

Zeige die folgenden Aussagen per Induktion für alle natürlichen Zahlen n:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n + 1)! - 1$

Solution:

(a) $n = 0$: $\sum_{i=1}^{0} = 0 = \frac{0}{3} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$ laut Definition der leeren Summe

Wem das nicht reicht, der kann's auch noch mit $n = 1$ zeigen.
$n = 1$: $1 * 2 = 2 = \frac{1*2*3}{3}$

$n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot (i+1) &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) + (n+1) \cdot (n+2) \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2) \\
&= \frac{(n+3) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}
\end{aligned}$$

(b) $n = 0$: $0 * 0! = 1! - 1 = 0$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i \cdot i! &= \sum_{i=0}^{n} i * i! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! \cdot 1 + (n+1)! \cdot (n+1) - 1 \\ &= (n+1)! \cdot ((n+1)+1) - 1 \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion als Beweistechnik

Beweise durch vollständige Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n! \leq n^n$.

Solution:

Induktionsanfang: $n = 0$: durch Ausrechnen.
$n! = 0! = 1 \leq 0^0 = n^n$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! \leq n^n$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$
zu zeigen ist: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n+1)! \leq (n+1)^{(n+1)}$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\leq (n+1) \cdot n^n \\ &\leq (n+1) \cdot (n+1)^n \\ &= (n+1)^{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Papierstreifen

Wie viele Faltkanten entstehen, wenn man einen Papierstreifen n-mal immer wieder in der Mitte faltet? Beweise, dass deine Lösung korrekt ist.
Bemerkung: Mit "immer wieder in der Mitte" falten ist gemeint, dass das Blatt zwischendrin nicht gedreht wird. Wenn die erste Faltung parallel zu der kurzen Blattseite verläuft, so laufen alle anderen Faltungen ebenfalls parallel dazu. Die Faltungen kreuzen sich nicht!

Solution:

Um uns einen Überblick zu verschaffen, können wir einfach einen Papierstreifen nehmen, diesen falten und die Faltkanten zählen. Das führt uns zu folgender Tabelle:

n	0	1	2	3	4
Faltkanten	0	1	3	7	15

Das legt die Vermutung nahe, dass die Anzahl der Faltkanten nach n Faltungen $2^n - 1$ ist.

Das ist allerding nur eine *Vermutung* wir können uns nicht sicher sein. Um sicher zu gehen, müssen wir verstehen, welche Regel(n) hinter dem Entstehen der Faltkanten steckt. Also überlegen wir uns: Wie setzt sich die Anzahl der Faltkanten $F(n)$ zu einer gegebenen Faltung

n zusammen? Da offensichtlich keine Faltkanten verschwinden können, ist die Anzahl der Faltkanten zu einer gegeben Faltung n, die Faltkanten, die vor der Faltung bereits vorhanden waren $F(n-1)$ plus die Faltkanten, die neu hinzukommen $N(n)$. Also lässt sich die Anzahl der Faltkanten $F(n)$ ausdrücken als:

$$F(n) := F(n-1) + N(n)$$

Wie viele Faltkanten kommen also nun bei einer Faltung des Papierstreifens in der Mitte hinzu? Offensichtlich kommen genau so viele neue Faltkanten hinzu, wie Papierlagen übereinander liegen. Wir versuchen also die Frage zu beantworten, wie viele Papierlagen $L(n)$ nach der n-ten Faltung übereinander liegen.

n	0	1	2	3	4
$L(n)$	1	2	4	8	16

Wir stellen die Vermutung auf, dass $L(n) = 2^n$ ist. Warum könnte das stimmen? Ein Falten in der Mitte führt dazu, dass sich die Anzahl der übereinanderliegenden Papierlagen verdoppelt. Also gilt:

$$L(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot L(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun müssen wir beweisen, dass $L(n) = 2^n$ ist.

Beweis durch vollständige Induktion.

- IV: Sei $n = 0$. Laut Definition ist $L(0) = 1 = 2^0 = 2^n$.
- IS: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $L(n) = 2^n$. Zu Zeigen ist, dass dann $L(n+1) \stackrel{!}{=} 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} L(n+1) &= 2 \cdot L(n) && \text{laut Definition} \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{laut Induktionsannahme} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

□

Mit diesem Wissen, können wir nun die Anzahl der neu hinzukommenden Faltkanten $N(n)$ bei Faltung n als Anzahl der Papierlagen, die *vor* Faltung n übereinander liegen angeben. Somit ist $N(n) = L(n-1) = 2^{n-1}$. Damit ergibt für die Anzahl der Faltkanten $F(n)$:

$$F(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ F(n-1) + 2^{n-1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

und es bleibt zu zeigen, dass $F(n) \stackrel{!}{=} 2^n - 1$ ist.

Beweis durch vollständige Induktion.

- IV: Sei $n = 0$. Laud Definition ist $F(0) = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1 = 2^n - 1$.
- IS: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $F(n) = 2^n - 1$. Zu Zeigen ist, dass dann $F(n+1) \stackrel{!}{=} 2^{n+1} - 1$ gilt.

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + 2^{n-1} && \text{laut Definition} \\ &= 2^n - 1 + 2^n && \text{laut Induktionsannahme} \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5: Induktive Argumentation

Zeige: Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so mit den Farben Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben besitzen.
Bemerkung: Mit "an einer Kante zusammenstoßen" ist gemeint, dass die Teilfächen eine gemeinsame Kante haben. Es ist **nicht** gemeint, dass sie sich an einer Ecke treffen.

Solution: Induktion über g, die Anzahl der teilenden Geraden.

Induktionsanfang: $g = 1$
Die Aussage gilt offensichtlich, eine Teilfäche färben wir Weiß , eine Schwarz.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für g Geraden.

Induktionsschritt: $g \to g + 1$
Wir betrachten ein Rechteck mit $g+1$ teilenden Geraden. Wenn wir jetzt eine Gerade entfernen, erhalten wir ein Rechteck mit g teilenden Geraden. Dieses lässt sich laut Induktionsvoraussetzung in Schwarz und Weiß färben. Wenn wir nun die teilende Gerade wieder hinzufügen, wird das vorherige Rechteck mit g teilenden Geraden in 2 Teilflächen geteilt. Nun wählen wir eine Teilfäche aus und "vertauschen"die Färbung. Was weiß war wird schwarz und umgekehrt. Dadurch erhalten wir eine zulässige Färbung des Rechtecks mit $g + 1$ teilenden Geraden.

Aufgabe 6: (Teilmengen)

Die Menge $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bestehe aus n Objekten, die wir mit u_i bezeichnen.
Zeige: Die Menge U besitzt genau 2^n Teilmengen.
Hinweis: Bedenke, dass auch die leere Menge eine Teilmenge von U ist.

Solution:

Es kann sein, dass es bei dieser Aufgabe Probleme mit den Begriffen Teilmenge und leere Menge gibt. Kann man vielleicht schnell erklären mit Gummibärchen. Angenommen ich habe ein rotes und ein grünes. Welche Kombinationen von Bärchen kann ich jemandem abgeben? {rot}, {grün}, {rot, grün} und ich kann ihm gar keins (die leere Menge) geben.

Induktionsanfang: $n = 1$
Die Menge $U = \{u_1\}$ besitzt die beiden Teilmengen $\emptyset$ sowie $\{u_1\}$. U hat damit also $2 = 2^1 = 2^n$ Teilmengen.

Induktionsvoraussetzung: Wenn man die leere Menge als Teilmenge zulässt, besitzt eine n-elementige Menge U genau 2^n Teilmengen.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Sei also nun $U = \{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\} = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{u_{n+1}\}$. Wir betrachten die Menge aller Teilmengen von U. Diese lässt sich aufteilen in
U_{ohne}, die Menge aller Teilmengen von U die u_{n+1} **nicht enthalten**, und
U_{mit} , die Menge aller Teilmengen von U die u_{n+1} enthalten.
Laut Induktionsvoraussetzung ist $|U_{\text{ohne}}| = 2^n$.

Die Menge U_{mit} enthält nun aber genau so viele Teilmengen wie U_{ohne}: Wir fügen einfach zu allen Teilmengen aus U_{ohne} das Element u_{n+1} hinzu und erhalten so die Teilmengen aus U_{mit}.

Da die Mengen U_{ohne} und U_{mit} disjunkt sind, also $U_{\text{ohne}} \cap U_{\text{mit}} = \emptyset$, besitzt U genau $|U_{\text{ohne}}| + |U_{\text{mit}}| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen. $\square$

Viel Erfolg!