Vorsemesterkurs
Informatik
Übungsaufgaben

Übungszettel 5a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Quiz Summen und Produkte 1.

1. Welche(r) Term(e) ergeben 14?
   a) $\sum_{i=2}^{5} i$
   b) $\sum_{i=1}^{3}(2^i - 1)$
   c) $\sum_{i=0}^{3}(5 - i)$
2. Welche(r) Term(e) ergeben 7?
   a) $\sum_{i=1}^{7} i$
   b) $\sum_{i=3}^{4}(2i - i)$
   c) $\sum_{i=1}^{7} 1$
3. Welche(r) Term(e) ergeben 15?
   a) $\prod_{i=0}^{1} \prod_{j=0}^{2}(2j + i)$
   b) $\prod_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2}(2j + i)$
   c) $\sum_{i=0}^{1} \prod_{j=0}^{2}(2j + i)$

Solution:

1. a und c ergeben beide 14
2. b und c ergeben beide 7
3. a ergibt 0, b ergibt 54 und c ergibt 15.

Aufgabe 2: Quiz Rekursion

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ terminieren immer?
Hinweis: $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

(a)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$f(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n = 1 \\ 3 + f(n/2), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 5 + f(n+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Solution:

(a) ja, terminiert für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) nein terminiert nicht, da $f(n-2)$ für ungerade n den Basisfall nicht trifft. Außerdem ist $f(n-2)$ für $n = 1$ nicht mehr definiert, da das dann $f(-1)$ wäre und die Funktion nur für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert ist.

(c) terminiert für alle außer $n = 0$. Wäre zu retten, wenn man einen Basisfall für $n = 0$ angibt.

Aufgabe 3: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 &=& 1 &=& 1^2 \\ 3+1 &=& 4 &=& 2^2 \\ 5+3+1 &=& 9 &=& 3^2 \\ 7+5+3+1 &=& 16 &=& 4^2 \\ 9+7+5+3+1 &=& 25 &=& 5^2 \end{array}$$

Dieser Umstand soll jetzt in allgemeiner Form bewiesen werden (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:
Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.
Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.
In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$, so ist der Wert der Summe$(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

.

Solution: **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (2 \cdot 0 + 1) = 0 + 1 = 1 = 1^2 = (0+1)^2$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein n mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = ((n+1)+1)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \text{letzten Summanden abkoppeln} \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 && \text{Induktionsvoraussetzung benutzen} \\ &= (n+1)^2 + 2 \cdot (n+1) \cdot 1 + 1^2 && \text{Umformungen binomische Formel} \\ &= ((n+1)+1)^2 && \text{binomische Formel mit } a = (n+1) \text{ und } b = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Induktive Argumentation

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Beweise durch induktive Argumentation folgende Aussage:
n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ Arten anordnen.

Solution: Induktionsanfang: $n = 1$
1 Element lässt sich auf eine Art anordnen: $1 = 1!$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: n Elemente lassen sich auf $n!$ Arten anordnen.
Induktionsbehauptung: $n+1$ Elemente lassen sich auf $(n+1)!$ Arten anordnen.
Gegeben seien die Elemente $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$. Für die $n+1$ Elemente stehen $n+1$ Positionen zur Verfügung. Das Element e_{n+1} kann auf jeder dieser Positionen stehen. Nehmen wir also an, es stehe auf einer beliebigen Position x. Dann gibt es für die restlichen n Elemente laut Induktionsvoraussetzung noch $n!$ Möglichkeiten auf die restlichen n Positionen verteilt zu sein. Insgesamt gibt es also für alle $n+1$ Elemente $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ verschiedene Arten angeordnet zu sein. $\square$

Aufgabe 5: Rekursion und Induktion

n Personen treffen sich und jede schüttelt jeder anderen einmal die Hand. Wie viele Händedrücke gibt das? Löse das Problem rekursiv.

Solution: Offensichtlich kommt am Ende $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$ raus, denn jedes Händeschütteln erzeugt eine zweielementige Teilmenge. Wenn jeder mit jedem eine Teilmenge bildet, dann ist die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen gesucht.

Wichtig ist aber der Lösungsweg und außerdem soll das Problem rekursiv gelöst werden.

Also, wie viele Händedrücke $H(n)$ gibt es, wenn sich n Personen die Hände schütteln? $n = 1$ Person kann mit niemandem Hände schütteln $H(1) = 0$, $n = 2$ Personen können sich die Hand schütteln $H(2) = 1$, $n = 3$ Personen .... ich kann jedem der beiden andern die Hand schütteln, und die zwei können noch untereinander die Hände schüttlen, also $H(3) = 3$. Bei $n = 4$ Personen, ...ich kann wieder allen anderen $(n-1)$ Personen die Hand schütteln und dann können diese $(n-1)$ Personen sich noch untereinander die Hände schütteln. Also gilt für n Personen:

$$H(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1 \\ (n-1) + H(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

So, jetzt ist die Frage was die geschlossene Form dieser Rekursionsgleichung ist.

$$\begin{aligned} H(1) &= 0 \\ H(2) &= 1 + 0 \\ H(3) &= 2 + 1 + 0 \\ H(4) &= 3 + 2 + 1 + 0 \\ H(5) &= 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\ &\vdots \\ H(i) &= (i-1) + (i-2) + \dots + 1 + 0 \end{aligned}$$

Vermutung:

$$H(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Jetzt hilft der kleine Gauß ($\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$), den wir in der Vorlesung auch gemacht haben. Überträgt man das auf unsere Vermutung käme demnach raus, $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$:
$H(1) = 0 = 0 \cdot 1 = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

Induktionsschritt:
Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt: $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$
z.Zg. Dann gilt: $H(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
H(n+1) &= n + H(n) && \text{Definition von } H(n) \\
&= n + \frac{(n-1)n}{2} && \text{Induktionsannahme} \\
&= \frac{2n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} && \text{Erweitern auf 2} \\
&= \frac{2n + n^2 - n}{2} && \text{ausmultipliziert} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} && \text{faktorisiert}
\end{aligned}$$

$\square$

Viel Erfolg!