Übungszettel 1a - Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1: Quiz-Negation

Aussage A	Negation ¬A	richtig	falsch
Alle Menschen schlafen gerne lang.	Alle Menschen sind Frühaufsteher.		
Es gibt einen Informatikprofessor, der kein Informatikdiplom hat.	Alle Informatikprofessoren haben ein Informatikdiplom.		
Es gibt kein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.	Alle Tiere haben genau ein Ohr oder genau zwei Augen.		
Alle Pflanzen blühen im Frühling oder Sommer.	Es gibt eine Pflanze, die weder im Frühling, noch im Sommer blüht.		

Solution:

Aussage A	Negation ¬A	richtig	falsch
Alle Menschen schlafen gerne lang.	Alle Menschen sind Frühaufsteher.		X
Es gibt einen Informatikprofessor, der kein Informatikdiplom hat.	Alle Informatikprofessoren haben ein Informatikdiplom.	X	
Es gibt kein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.	Alle Tiere haben genau ein Ohr oder genau zwei Augen.		X
Alle Pflanzen blühen im Frühling oder Sommer.	Es gibt eine Pflanze, die weder im Frühling, noch im Sommer blüht.	X	

1.Die Verneinung von „Für alle“ ist „Es gibt“. Richtig müßte es heißen:„Es gibt (mindestens) einen Menschen, der Frühaufsteher ist“. Für ganz pingelige:„Es gibt (mindestens) einen Menschen, der nicht gerne lange schläft“.

2.Richtig, $\neg(\exists x \in M : A(x)) \equiv \forall x \in M : \neg A(x)$.

3.Gemein getrickst mit der Verneinung bereits in der Aussage. Da steht $\neg(\exists x \in M : A(x) \wedge B(x))$. Wenn wir das verneinen entsteht: $\neg(\neg(\exists x \in M : A \wedge B))$. Da sich doppelte Verneinung aufhebt, bleibt $\exists x \in M : A(x) \wedge B(x) \equiv \neg(\neg(\exists x \in M : A(x) \wedge B(x)))$. Also heißt es richtig:„Es gibt (mindestens) ein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat“.

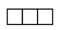
4.Richtig, $\neg(\forall x \in M : A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x \in M : \neg(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x \in M : \neg(A(x)) \wedge \neg(B(x))$. Für pingelige:„Es gibt (mindestens) eine Pflanze, die nicht im Frühling und nicht im Sommer blüht“.

Aufgabe 2: Quiz-Implikation

Gegeben sei eine zusammenhängende Figur aus Quadraten gleicher Größe. Betrachte folgende Aussagen.

A: Die Anzahl der Quadrate ist drei.

B: Die Anzahl der Quadrate ist durch drei teilbar.

C: Die Figur lässt sich mit Steinen der Form  pflastern.

D: Die Figur lässt sich mit Steinen der Form  pflastern.

Welche der folgenden Implikationen sind korrekt?

Implikation	**richtig**	**falsch**
$A \to B$		
$A \to C$		
$B \to A$		
$B \to D$		
$C \to A$		
$C \to B$		
$D \to A$		
$D \to B$		

Solution:

Implikation	**richtig**	**falsch**
$A \to B$	X	
$A \to C$		X
$B \to A$		X
$B \to D$		X
$C \to A$		X
$C \to B$	X	
$D \to A$		X
$D \to B$	X	

Aufgabe 3: Aussagenlogische Formeln entwerfen

Finde die Teilaussagen der folgenden Sätze und stelle eine äquivalente aussagenlogische Formel auf.

(a) Wenn auf der Party nicht geraucht werden darf und Paula nicht zur Party eingeladen ist, dann kommt Petra auf die Party.

(b) Wenn viele Studenten während des Studiums Geld verdienen müssen und die Studienanforderungen nicht gesenkt werden, erhöht sich die durchschnittliche Studiendauer.

(c) Genau dann, wenn die Sonne scheint und es nicht regnet, oder die Lufttemperatur über 25°C ist, geht Tom ins Freibad.

Hinweis: Gehe vor wie in Aufgabe 7.1 im Skript (S.96). Finde die Schlüsselwörter und identifiziere die atomaren Aussagen.

Solution:

(a) G:„auf der Party darf geraucht werden“
E:„Paula ist zur Party eingeladen“
P:„Petra kommt auf die Party“
$(\neg G \land \neg E) \to P$

(b) V:„Viele Studenten müssen während des Studiums Geld verdienen“
S:„Studienanforderungen werden gesenkt“
H:„durchschnittliche Studiendauer erhöht sich“
$(V \land \neg S) \to H$

(c) S:„die Sonne scheint“
R:„es regnet“
L:„die Lufttemperatur ist über 25°C.“
F:„Tom geht ins Freibad“
$((S \land \neg R) \lor L) \leftrightarrow F$

Aufgabe 4: Aussagenlogik: Wahrheitstafeln

Gib für die folgenden aussagenlogischen Formeln jeweils eine Wahrheitstafel an. Stelle für jede der Formeln anhand der Wahrheitstafel fest, ob die Formel unerfüllbar, erfüllbar und/oder eine Tautologie ist.

Hinweis: Definition 7.21 (S.99) und Anmerkung 7.23 im Skript (S.100) könnten hilfreich sein

(a) $A \to B$

(b) $A \lor (B \land C)$

(c) $(A \land B) \to (A \land B)$

(d) $(A \land \neg B) \land (A \to B)$

Solution:

(a)

A	B	$(A \to B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

erfüllbar, keine Tautologie

(b)

A	B	C	$(B \land C)$	$(A \lor (B \land C))$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

erfüllbar, keine Tautologie

(c)

A	B	$(A \land B)$	$(A \land B) \to (A \land B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

erfüllbar, Tautologie (Von Form $A \to A$)

(d)

A	B	$\neg B$	$(A \land \neg B)$	$(A \to B)$	$((A \land \neg B) \land (A \to B))$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

unerfüllbar

Aufgabe 5: Rechenregeln für aussagenlogische Formeln

Zeige mithilfe von Wahrheitstabellen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**

- $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
- $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

(b) **De Morgan'sche Gesetze**

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Solution:

(a) **Absorptionsgesetze**

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \vee (A \wedge B))$	$A \wedge (A \vee B))$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(b) **De Morgan'sche Gesetze**

A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Aufgabe 6: Verneinung

Finde die Verneinungen für folgende Aussagen:

(a) Alle Studenten besitzen mindestens ein Lehrbuch.

(b) Alle Studenten haben einen GK und einen LK besucht.

(c) Alle Studentinnen haben einen GK Physik oder einen LK Mathe besucht.

(d) Es existiert ein Student, der keine Übungsaufgabe lösen kann.

(e) Jede Studentin hat entweder einen LK Informatik oder einen LK Mathe besucht.

(f) In jeder Übungsgruppe existiert ein Student, der keine Übungsaufgabe lösen kann.

(g) In jeder Übungsgruppe existiert für jede Übungsaufgabe ein Student, der diese Aufgabe lösen kann.

Solution:

(a) Es gibt einen Studenten, der kein Lehrbuch besitzt.

(b) Es existiert ein Student, der keinen GK oder keinen LK oder weder einen GK noch einen LK besucht hat.

(c) Es gibt eine Studentin, die weder einen GK Physik, noch einen LK Mathe besucht hat.

(d) Alle Studenten können jeweils mindestens eine Übungsaufgabe lösen.

(e) Es gibt mindestens eine Studentin, die weder einen LK Informatik noch einen LK Mathe besucht hat, oder es gibt eine Studentin, der sowohl einen LK Informatik als auch einen LK Mathe besucht hat, oder es gibt beide Arten von Studentinnen.

(f) Es gibt eine Übungsgruppe, in der alle Studenten jeweils mindestens eine Übungsaufgabe lösen können.

(g) Es gibt eine Übungsgruppe, in der mindestens eine Übungsaufgabe von keinem der teilnehmenden Studenten gelöst werden kann.

Aufgabe 7: Mengen-Operationen

Gegeben seien folgende Mengen: A:= {1,3,5,7}, B:={3,7,10}, C:={1,2}

(a) Bestimme $A \cup B$.

(b) Bestimme $A \cap B$.

(c) Bestimme $A \cap C$.

(d) Bestimme $B \cap C$.

(e) Bestimme $A \cup B \cup C$.

(f) Bestimme $A \setminus C$.

(g) Bestimme $B \setminus C$.

(h) Sind A und C disjunkt?

(i) Sind B und C disjunkt?

(j) Gib für (a) bis (g) die Kardinalität an.

Solution:

(a) {1,3,5,7,10}

(b) {3,7}

(c) {1}

(d) $\emptyset$

(e) {1,2,3,5,7,10}

(f) {3,5,7}

(g) {3,7,10}

(h) nein, gemeinsames Element ist 1

(i) ja, der Schnitt ist leer (siehe (d))

(j) kann man oben ablesen

Aufgabe 8: Mengen

Sei M:={1,2}, N:={2,3,4}. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $M \subseteq N$

(b) $N \subseteq M$

(c) $M = N$

(d) $M \neq N$

(e) $\{2, 4\} \subseteq N$

(f) $2 \in M$

(g) $3 \subseteq N$

(h) $\{2, \{3, 4\}\} \subseteq N$

Solution:

(a) falsch

(b) falsch

(c) falsch

(d) richtig

(e) richtig

(f) richtig

(g) falsch

(h) falsch

Aufgabe 9: Darstellung von Mengen

In der Mathematik gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Menge zu beschreiben. Die einfachste Notation besteht darin, die Elemente in Mengenklammern aufzuzählen: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$. Das geht natürlich nur für kleine Mengen. Ein Beispiel für eine größere Menge ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen: $\{n \in \mathbb{N} |$ es ex. $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k\}$. Dies liest man: „Die Menge all derjenigen n aus $\mathbb{N}$, für die es eine natürliche Zahl k gibt, sodass $n = 2k$ gilt.“

(a) Versucht nun zu verstehen, welche Elemente die folgenden Mengen haben:

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 17, n < 42\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 3k + 1\}$
3. $\{17, 18, 19, 18\}$
4. $\{a, b, c, d\}$
5. $\{(m, n) \mid m = 2n\}$

(b) Beschreibt nun die folgenden Mengen aus in mathematischer Notation (betrachtet ausschließlich natürliche Zahlen):

1. Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
2. Die Menge aller Quadratzahlen.
3. Die Menge mit den Zahlen 6, 28, 496 und 8128.
4. Die Menge aller geraden Zahlen zwischen 10 und 100.
5. Die Menge aller Quadratzahlen zwischen 28 und 34.

Solution:

(a)

1. Die Zahlen 18, 19,. . . , 41
2. Die Zahlen 1, 4, 7,. . .
3. Die Zahlen 17,18 und 19.
4. Die ein bis vier Zahlen, die durch die Variablen a, b, c und d dargestellt werden.
5. Dies ist eigentlich keine korrekte Mengendarstellung. Denoch wird sie oft benutzt, wenn klar ist, aus welchem Bereich m und n kommen sollen. Sind dies z. B. die natürlichen Zahlen, so besteht die Menge aus den Paaren $(2, 1), (4, 2), (6, 3), \dots$.

(b)

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k + 1\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = k^2\}$
3. $\{6, 28, 496, 8128\}$
4. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. }, k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k, 10 < n < 100\}$.
   Da „zwischen“ nicht ganz eindeutig ist, geht auch $\{\dots, 10 \leq n \leq 100\}$.
5. $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = k^2, 28 < n < 34\}$.
   Hier gilt das gleiche wie gerade eben. Außerdem ist diese Menge die leere Menge (Symbol dafür: $\emptyset$).

Aufgabe 10: Wahre Freunde

Um mit ihren Freunden in Kontakt zu bleiben benutzt Sabrina facebook, WhatsApp und Telegram. In facebook hat Sie 174 Kontakte, in WhatsApp 41 und in Telegram 17 Kontakte. Davon sind 32 Kontakte mindestens in facebook und in WhatsApp, 9 in facebook und in Telegram, 5 in WhatsApp und in Telegram, und 2 Kontakte haben facebook, WhatsApp und Telegram. Sei F die Menge aller Kontakte in facebook, W die Menge aller Kontakte in WhatsApp und T die Menge aller Kontakte in Telegram.

(a) Zeichne ein Venn-Diagramm, in dem die Mengen F, W, T, $F \cap W$, $F \cap T$, $W \cap T$ und $F \cap W \cap T$ erkennbar sind.

(b) Wieviele tatsächliche Freunde (*verschiedene* Kontakte) hat Sabrina insgesamt? (d.h. berechne $|F \cup W \cup T|$.
Hinweis: Schau dir dein Venn-Diagramm gut an

Solution:

(a) Kann wohl jeder selber malen.

(b) $|F|+|W|+|T|-|F\cap W|-|F\cap T|-|W\cap T|+|F\cap W\cap T| = 174+41+17-32-9-5+2 = 188$
Bei der Addition aller Einzelkontakte werden die Teilnehmer, die bei zwei Diensten sind, doppelt gezählt. Daher müssen sie wieder abgezogen werden. Die 2 Personen, die bei allen 3 Diensten sind, werden sogar 3-mal gezählt. Allerdings befinden sie sich auch in jedem Schnitt, werden also auch 3-mal wieder abgezogen. Daher müssen sie am Schluss nochmal gezählt werden.

Viel Erfolg!