Mengen

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2023/24

Ronja Düffel

21. September 2023

Wieso, weshalb, warum?

- Wir wollen:
  - allgemeingültige Aussagen treffen.
  - "allgemeingültige" Lösungen finden.
- Wir benötigen die Möglichkeit:
  - Objekte/Konzepte zusammenzufassen
  - anhand der, für die Problemstellung relevanten Eigenschaften
  - über die wir Aussagen machen können
  - deren Eigenschaften und Aussagen wir beweisen können
- gibt es in vielen Programmiersprachen als Datentyp/Container (`set`)

Mengen

Definition (Menge (nach Cantor))

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche „Elemente der Menge M“ genannt werden, zu einem Ganzen.

zum Beispiel:

- die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- die Menge aller Vorkursteilnehmer*innen
- die Menge aller Bücher in der Informatikbibliothek
- die Menge aller aussagenlogischen Formeln

Frage 13

Was ist in einer Menge wichtig?

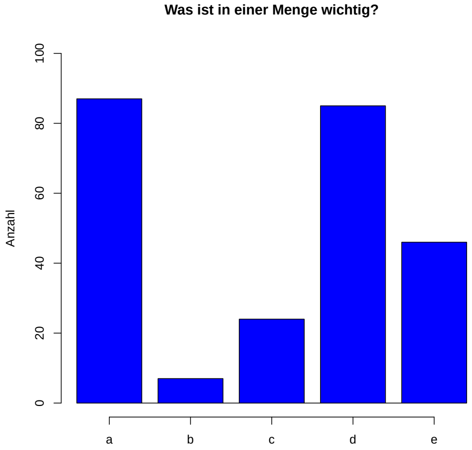
a) Das Vorhandensein der Elemente

b) Die Reihenfolge der Elemente

c) Die Häufigkeit des Auftretens der Elemente

d) Alle drei der oben genannten Eigenschaften

Anmeldung



Notation und Definition

Notation:

$m \in M \quad :\Leftrightarrow \quad m$ ist Element der Menge M.
$m \notin M \quad :\Leftrightarrow \quad m$ ist kein Element der Menge M.

- *extensional*, aufzählen der Elemente
  z.B. $M_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$
- *intensional*, Angabe von charakteristischen Eigenschaften der Elemente
  z.B. $M_1 := \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 7\}$

Definition (leere Menge)

Die **leere Menge** $\emptyset$ *ist die Menge, die kein(e) Element(e) enthält.* $\emptyset = \{\ \}$

Beachte:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

$$\{\ \} \neq \{\{\ \}\}$$

Russel'sche Antinomie

Beispiel

Sei A die Menge aller Mengen B, die sich selbst nicht enthalten, $A := \{B | B \text{ ist eine Menge}, B \notin B\}$

Frage: Ist die Menge A in sich selbst enthalten?

$A \in A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \notin A$ ↯

$A \notin A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \in A$ ↯

Wir vermeiden Mengen mit Selbstreferenz und arbeiten weiter mit Cantors Mengenbegriff

Eigenschaften

- Alle Elemente einer Menge sind **verschieden**. D.h. kein Wert kann "mehrfach" vorkommen.
- Elemente einer Menge haben **keine** feste Reihenfolge.
- Eine Menge M kann auf verschiedenen Arten beschrieben werden

  z.B:

$$\begin{aligned} M &:= \{1,3,5,7\} \\ &= \{3,5,7,1\} \\ &= \{1,1,5,3,5,7\} \\ &= \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7, x \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

- Mengen können auch "verschiedenartige" Elemente enthalten
  z.B.: $M_d := \{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}$

Mengenalgebra I

Definition (Gleichheit, Teilmenge, Obermenge)

Seien L und M Mengen.

- *L und M sind genau dann* **gleich** *(kurz: $L = M$), wenn sie* **dieselben** *Elemente enthalten.*
- *L ist genau dann eine* **Teilmenge** *von M (kurz: $L \subset M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist.*
  Bsp: $L := \{4, 2\}$ und $M := \{2, 4\}$
- *L ist genau dann eine* **echte Teilmenge** *von M (kurz: $L \subsetneq M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist, aber nicht jedes Element von M auch ein Element von L.*
  Bsp: $L := \{4, 2\}$ und $M := \{1, 2, 4\}$
- *L ist genau dann eine* **Obermenge** *von M ($L \supset M$), wenn M eine Teilmenge von L ist (kurz: $M \subset L$).*
  Bsp: $L := \{3, 1, 6\}$ und $M := \{3, 6\}$

Satz 1

Satz

Seien K, L und M Mengen, für die $K \subset L$ und $L \subset M$ gilt. Dann gilt auch $K \subset M$.

Beispiel

Sei $K := \{Stein, Schere, Papier\}$, $L := \{Stein, Schere, Papier, Eidechse\}$ und $M := \{Stein, Schere, Papier, Eidechse, Spock\}$.
Dann gilt:

- $K \subset L$
- $L \subset M$
- $K \subset M$

Satz 2

Satz

Seien L und M Mengen. $L = M$ gilt genau dann, wenn $L \subset M$ und $M \subset L$ gelten.

Beispiel

- *Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4, 5\}$. Dann ist:*

  $$L = M \text{ und } L \subset M \text{ und } M \subset L$$

- *Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4\}$. Dann ist:*

  $$M \subset L \text{ und } L \not\subset M \text{ und } L \neq M$$

Mengenalgebra II

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz...)

Seien L und M Mengen.

- *Der* **Schnitt** *von L und M ist die Menge*
$$L \cap M := \{x | x \in L \textit{ und } x \in M\}.$$
- *Die* **Vereinigung** *von L und M ist die Menge*
$$L \cup M := \{x | x \in L \textit{ oder } x \in M\}.$$
- *Die* **Differenz** *von L und M ist die Menge*
$$L \setminus M := \{x | x \in L \textit{ und } x \notin M\}.$$
- *L und M heißen* **disjunkt**, *wenn sie kein gemeinsames Element enthalten (kurz: $L \cap M = \emptyset$).*

Beispiel

Sei $L := \{1, 2, 3, 6\}$ und $M := \{2, 4, 5, 6\}$

- $L \cap M = \{2, 6\}$
  alle Elemente, die sowohl in L als auch in M enthalten sind
- $L \cup M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  alle Elemente, die in L oder in M enthalten sind
- $L \setminus M = \{1, 3\}$
  alle Elemente, die in L aber nicht in M enthalten sind

Mächtigkeiten

Definition

- *Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnet man auch als* **Mächtigkeit** *der Menge M (in Zeichen: $|M|$).*
- *Eine Menge M heißt* **endlich**, *wenn sie nur endlich viele Elemente enthält, d.h. es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass M genau n viele Elemente enthält.*

$$|M| := \begin{cases} \textit{Anzahl der Elemente in } M, & \textit{falls } M \textit{ endlich ist} \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

z.B.:

- $|\{4, 7, 2\}| = 3$
- $|\{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$ **aber** $|\{\emptyset\}| = 1$

Satz 3

Satz

Seien L und M Mengen. Es gilt $|L \cup M| = |L| + |M|$ genau dann, wenn L und M disjunkt sind.

Beispiel

- *Sei $L := \{Stein, Papier, Schere\}$ und $M := \{3, Haus, Spock, 5\}$*
  Dann ist:

  $$L \cap M = \emptyset \text{ und } L \cup M = \{Stein, Papier, Schere, 3, Haus, Spock, 5\} \text{ und}$$
  $$|L \cup M| = 7 = 3 + 4 = |L| + |M|$$

- *Sei $L := \{Stein, Papier, Schere\}$ und $M := \{Schere, Haus, Spock, 5\}$*
  Dann ist:

  $$L \cap M = \{Schere\} \text{ und } L \cup M = \{Stein, Papier, Schere, Haus, Spock, 5\} \text{ und}$$
  $$|L \cup M| = 6 \neq 3 + 4 = |L| + |M|$$

  Die Elemente der Schnittmenge werden doppelt gezählt.

Fragen?

?