

# **Schallausbreitung in Kristallen**

Physikalisches Institut  
Fachbereich Physik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main

## EINIGE BEMERKUNGEN VORWEG

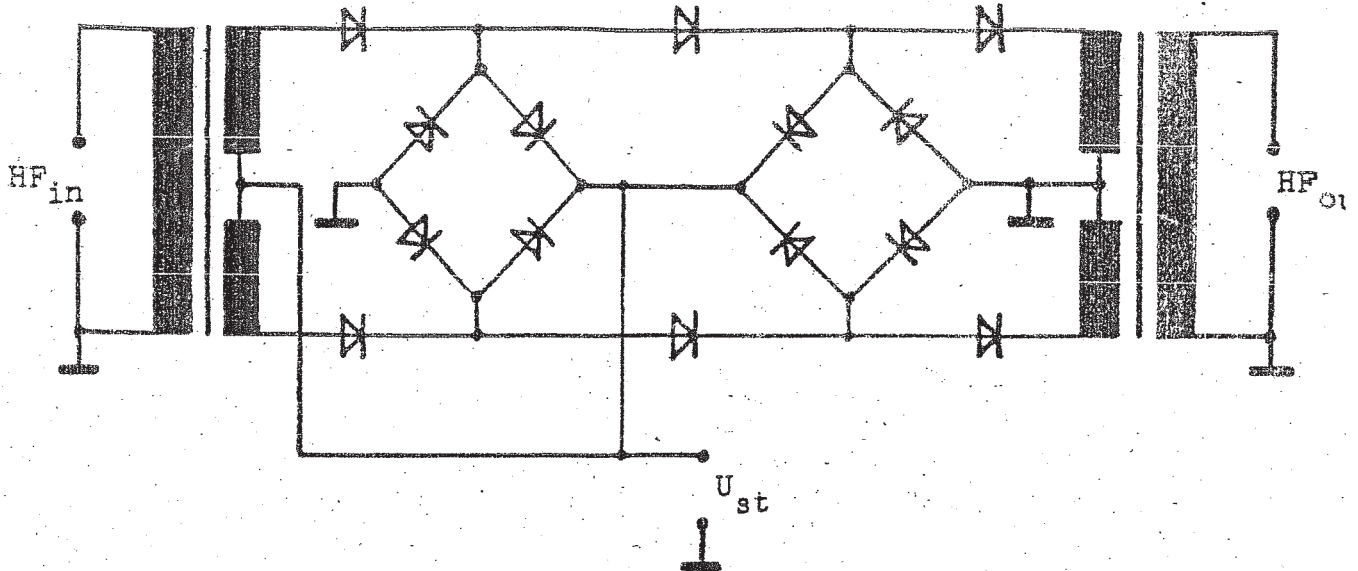
Dieser Versuch besteht aus Bauteilen, die bei nicht sachgemäßer Behandlung zerstört werden können.

Dies kann lange und teure Reparaturen verursachen, während der Versuch nicht ausgegeben werden kann.

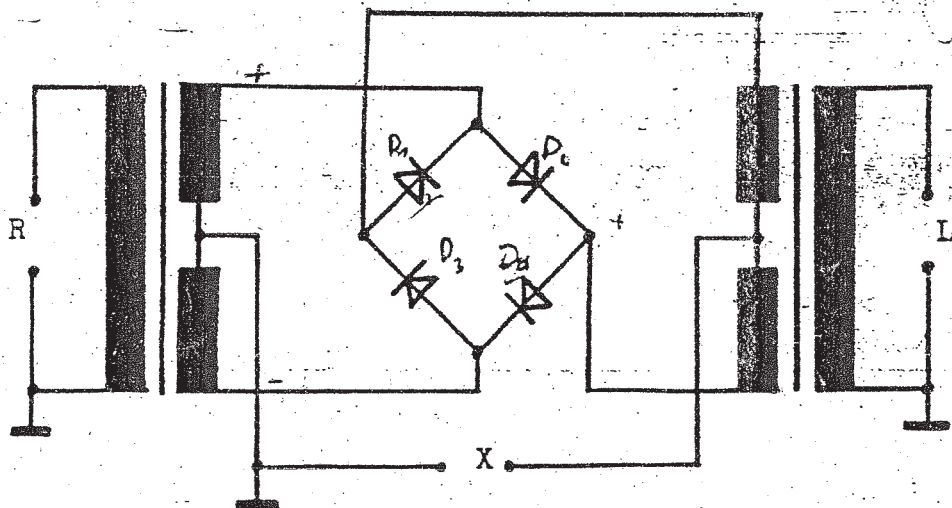
Wir bitten daher um die Beachtung der folgenden Punkte:

- 1) Die Anleitung soll vollständig und sorgfältig durchgearbeitet werden.
- 2) Kein Gerät darf auf Verdacht eingeschaltet werden um "mal zu sehen, was passiert". Die Apparaturkomponenten dürfen natürlich erst in Betrieb genommen werden, wenn man genau weiß, was sie tun.
- 3) Eventuelle Änderungen in der Verkabelung sind mit Bedacht vorzunehmen. Im Zweifelsfall immer einen Assistenten fragen.
- 4) Der Leistungsverstärker ist das eigentlich gefährliche Teil in der Apparatur. Sein Ausgang darf nur zum Treiben der Quarz-Ultraschallwandler benutzt werden. Dieser Ausgang darf mit keinem anderen Eingang der Elektronik oder den Keramik-Wandlern verbunden werden.

# SCHALTBILDER VON DIODEN-SCHALTER UND DIODEN-MISCHER



$HF_{in, out}$  : Hochfrequenz- Eingang und -Ausgang  
 $U_{st}$  : Steuerspannung, Schalt- Eingang



$R$  : Radio (Eingang)  
 $L$  : Local (Referenz-Eingang)  
 $X$  : Multiplikations-Ausgang

## Zur Vorbereitung

- Theorie der elastischen Eigenschaften von Kristallen
- Wellenausbreitung in elastischen Medien
- Isotrope und anisotrope elastische Medien
- Möglichkeiten der Ultraschallerzeugung
- Prinzip der phasenempfindlichen Detektion (Lock-In-Messtechnik)
- Elektronische Hochfrequenzkomponenten, Schalter, Mischer im Versuchsaufbau
- Hochfrequenzeigenschaften von Kabeln

## Durchführung

- Messung von Schallgeschwindigkeiten in LiF
- Bestimmung der elastischen Konstanten von LiF

## Zur Ausarbeitung (stets das Messprotokoll beifügen!)

### Aufgabe 1: Bestimmung der elastischen Konstanten von LiF mit der Weg-Laufzeit-Methode

- 1) Berechne (!) die Dichte von LiF.
- 2) Nehme die Apparatur mit Leistungsverstärker mit der LiF-Probe in Betrieb. Erzeuge ein dem beiliegenden Zeitdiagramm ähnliches Echo-Pattern. Dazu sollte die Hochfrequenzamplitude von Null an gesteigert werden, bis die Signale gut zu erkennen sind. Wenn sich bei weiterer Erhöhung des Signalpegels die Signale nicht mehr ändern, ist die Elektronik übersteuert und die Hochfrequenzamplitude sollte wieder verringert werden. Die Messung wird hier „double-ended“ durchgeführt, d. h. Sender und Empfänger befinden sich hier an verschiedenen Enden der Schallstrecke.
- 3) Bestimme die Schallgeschwindigkeit für die drei vorgegebenen Schallstrecken in LiF mit der Weg-Laufzeit-Methode. Beziehe dabei möglichst viele Echos mit ein und bilde den Mittelwert.
- 4) Berechne die elastischen Konstanten von LiF.

### Aufgabe 2: Phasenempfindliches Verfahren zur Schallgeschwindigkeitsmessung in LiF

- 1) Betrachte nun den Zusammenhang des Phasensignals und der Ultraschallfrequenz. Wie lautet der mathematische Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Phase? Wie lässt sich daraus die Schallgeschwindigkeit bestimmen?
- 2) Bestimme die Schallgeschwindigkeiten für die drei vorgegebenen Schallstrecken in der LiF-Probe aus der Frequenzabhängigkeit der Phase. Führe diese Messung für das Phasensignal des Transits und des ersten Echos durch. Vergleiche die Empfindlichkeiten für beide Signale.
- 3) Berechne die elastischen Konstanten von LiF. Vergleiche die Messwerte mit den in Aufgabe 2 gewonnenen Werten.

### Aufgabe 3: Elektronik

- 1) Beschreibe die Funktionsweise eines Diodenschalters und eines Diodenmischers. Welche mathematische Operation beschreibt diese Funktion?
- 2) Was bewirkt die Kombination von Diodenschalter und nachgeschaltetem Tiefpass? Finde einen mathematischen Ausdruck für das Ausgangssignal dieser Kombination, wenn man L und R harmonische Signale zuführt.
- 3) Erkläre die Funktionsweise der Ultraschallelektronik insgesamt.
- 4) Warum ist die gesamte Verkabelung koaxial ausgeführt?
- 5) Was bewirken die 50-Ohm-Abschlüsse am Oszilloskop?

### Aufgabe 4: Zum Phänomen der Piezo-Elektrizität

- 1) Wie funktioniert ein Ultraschallwandler?
- 2) Warum gibt es keramische und einkristalline Wandler, wo ist ihr Einsatzgebiet?
- 3) Warum sind Wandler mit gleicher Frequenz verschieden dick?
- 4) Welche Frequenzcharakteristik hat solch ein Wandler?
- 5) In welchen Anregungsformen (Schwingungsmoden) schwingt der Wandler bei den verschiedenen Frequenzen?

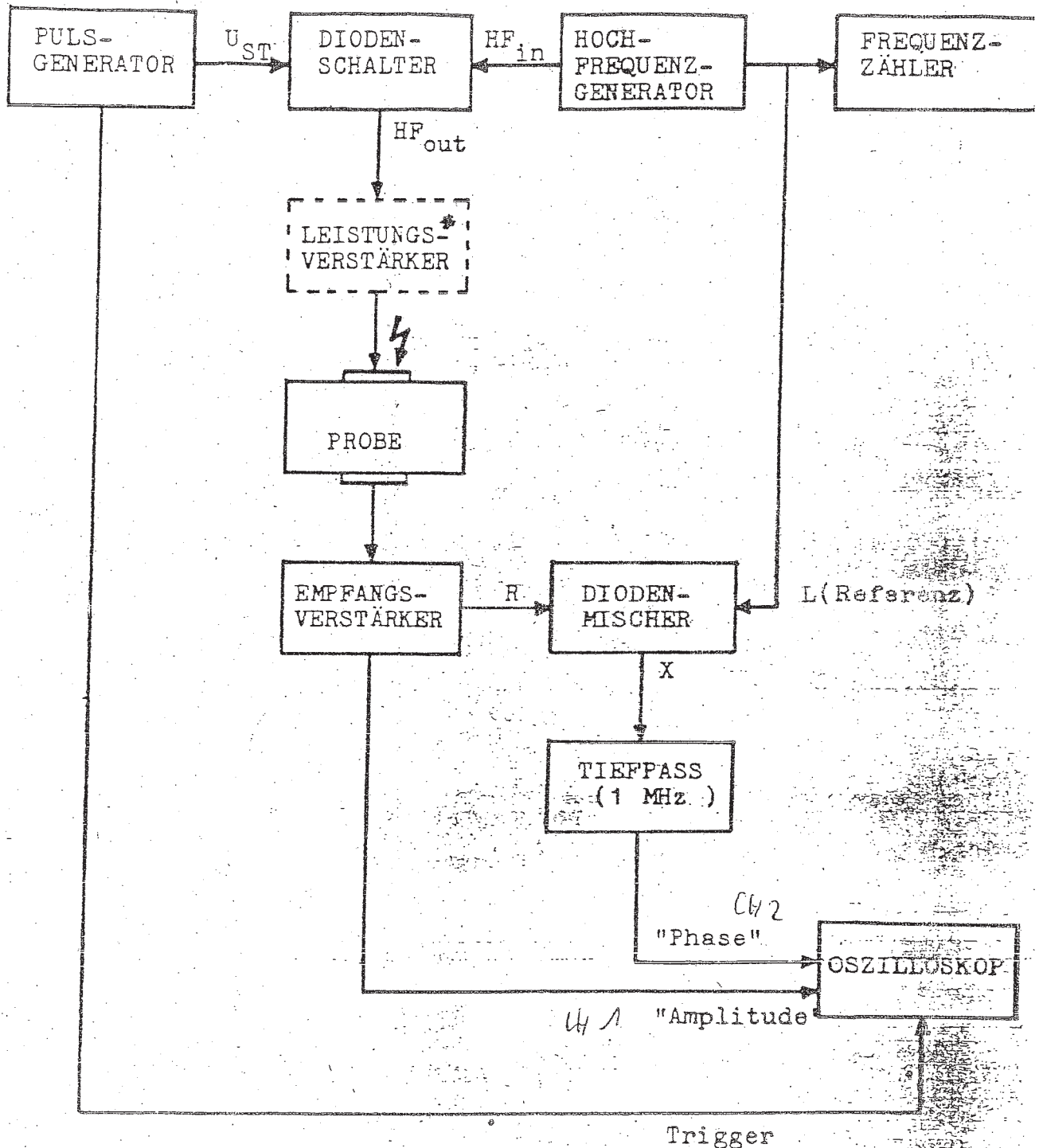
## Material zur Vorbereitung

### Empfohlene Literatur

- W. Demtröder, *Experimentalphysik 1, 2, 3*, Springer Verlag.
- Gerthsen, Vogel, *Physik*, Springer Verlag.
- Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*.
- K.-H. Rohe, *Elektronik für Physiker*.
- L. Starke, *Schaltungslehre der Elektronik, Band 1 Analogtechnik*.



# BLOCKSCHALTBILD DER ULTRASCHALL-ELEKTRONIK

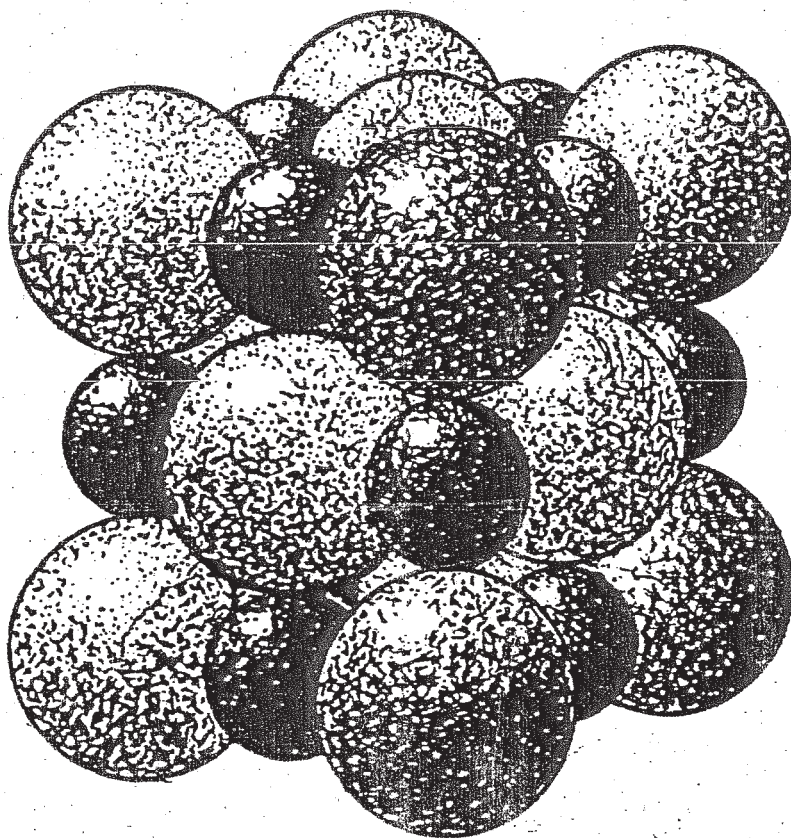


\* Vorsicht, der Leistungsverstärker wird nicht für alle Aufgaben benötigt. Sein Ausgang darf mit keinem anderen Eingang verbunden werden, da das betreffende Bauteil dadurch möglicherweise zerstört wird.  
 Abkürzungen in der Zeichnung:  $U_{ST}$ : Steuerspannung;  $HF_{in, out}$ : Hochfrequenz-Eingang und -Ausgang; R: Radio; L: Local; X: Multiplikationsausgang.





## KRISTALLSTRUKTUR VON LITHIUMFLUORID



Die kleinen Kugeln stellen die Lithium- Ionen, die großen Kugeln die Fluor- Ionen dar.

Struktur : kubisch flächenzentriert ( fcc)

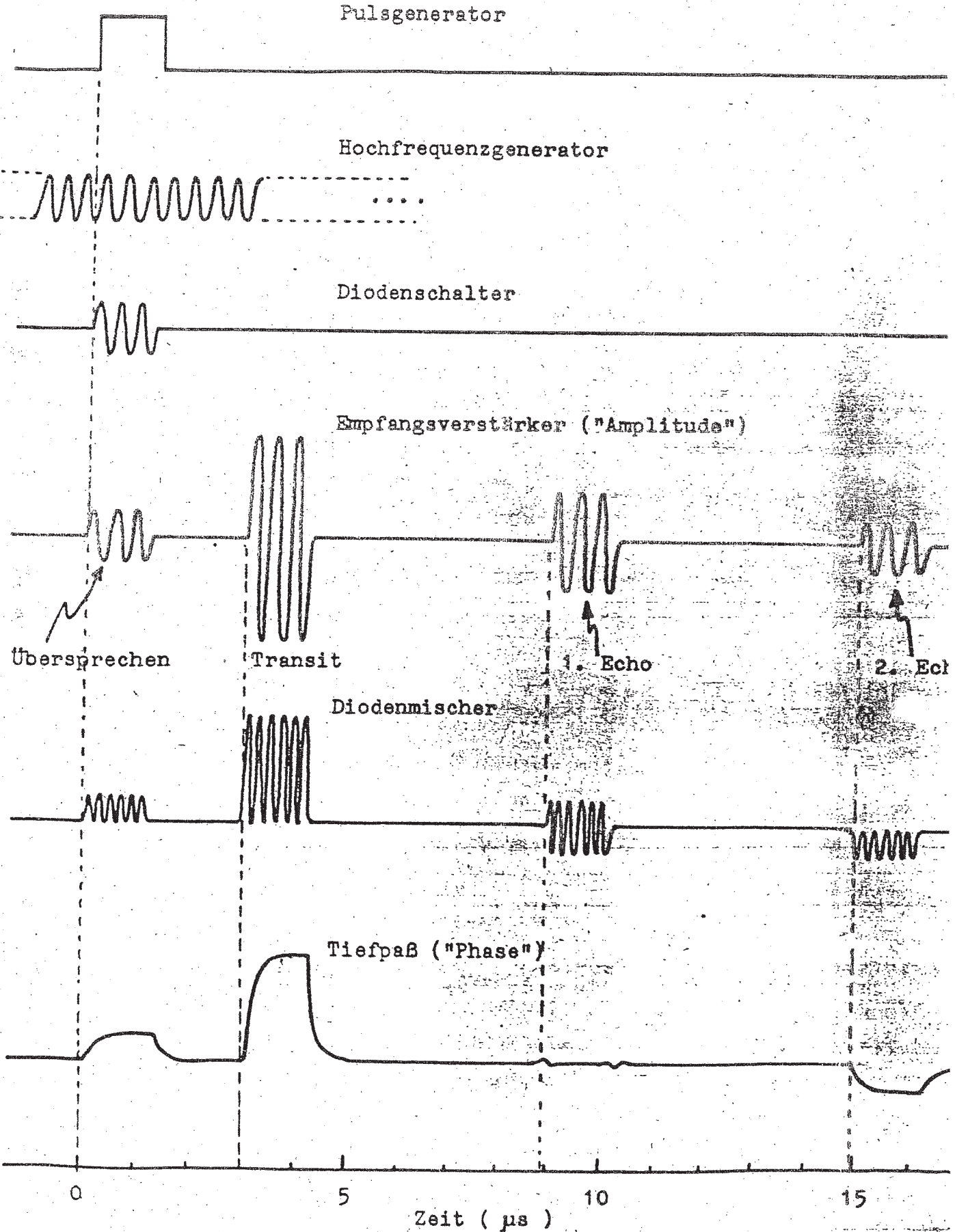
Gitterkonstante :  $a = 0,401 \text{ nm}$  (bei Raumtemperatur)

Quelle : R. W. G. Wyckoff  
Crystal Structures  
Wiley & Sons, New York

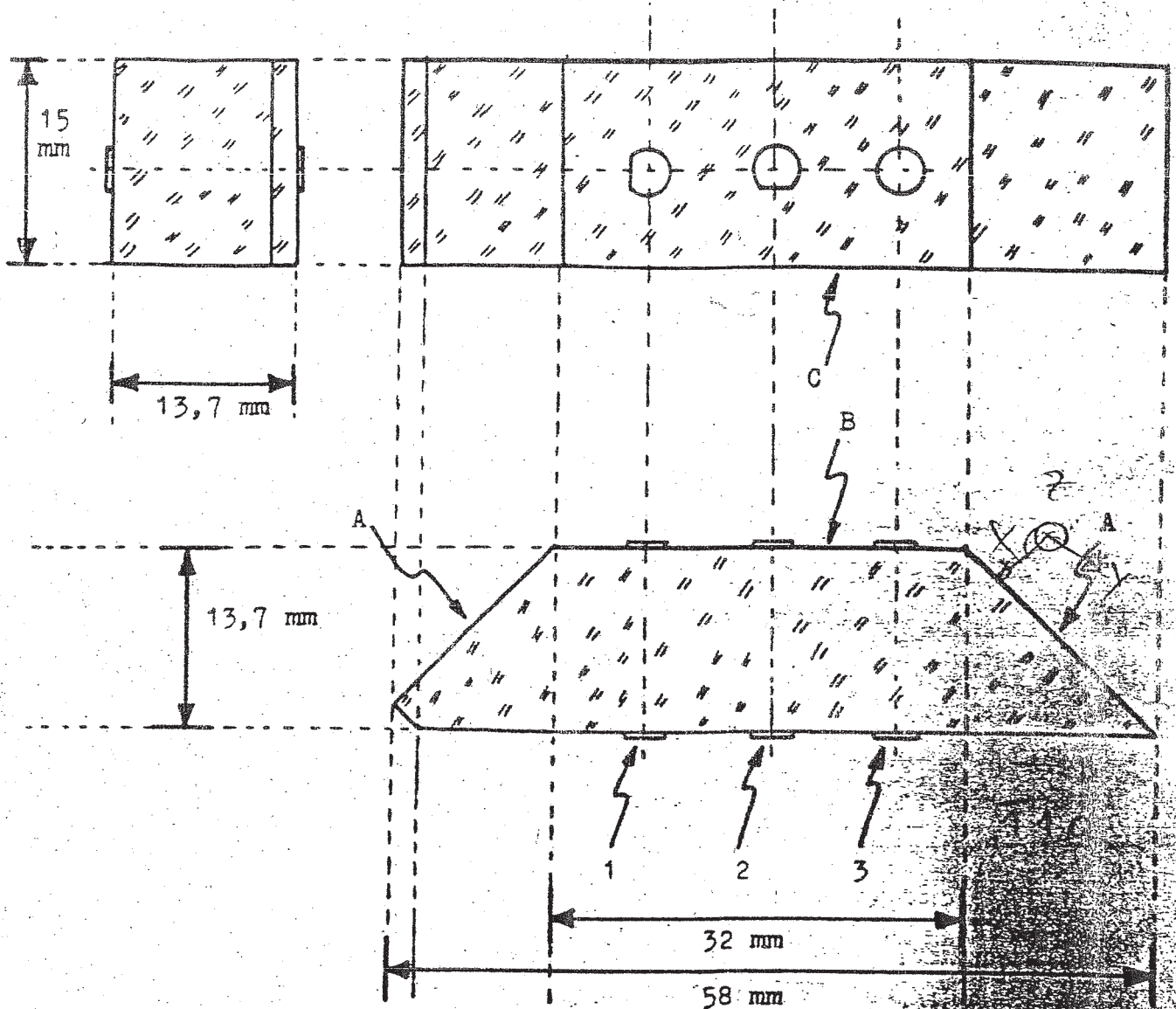
✱

IDEALISIERTE ZEITDIAGRAMME DER HOCHFREQUENZSIGNALE IN DER  
ULTRASCHALLELEKTRONIK

Die Signale sind hier beispielhaft dargestellt für die folgenden Parameter: Pulslänge :  $1,2 \mu\text{s}$  , Frequenz :  $2,5 \text{ MHz}$  , Laufzeit :  $3 \mu\text{s}$  , Methode : double ended .



# ABMESSUNGEN DER LITHIUMFLUORID-PROBE UND ANORDNUNG DER TRANSDUCER

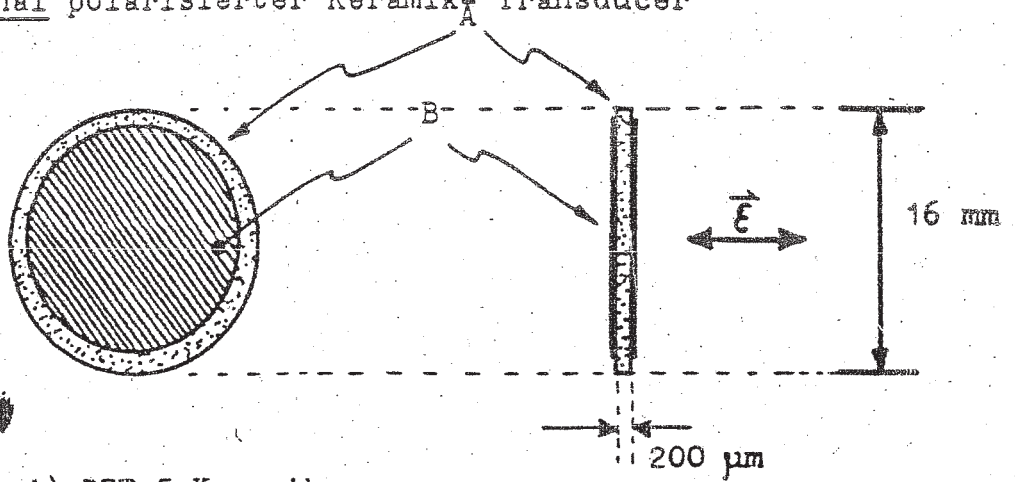


- A) natürliche Spaltflächen; (100)- und (010)- Ebenen  
 B) geschnittene und optisch polierte (110)- und  $(\bar{1}\bar{1}0)$ - Ebenen  
 C) natürliche Spaltfläche; (001)- Ebene

- 1) Quarz- Ultraschallwandler, Resonanzfrequenz ca. 10 MHz, transversal polarisiert;  $\vec{k} \parallel (110)$ ;  $\vec{\epsilon} \parallel (\bar{1}\bar{1}0)$   
 2) Quarz- Ultraschallwandler, Resonanzfrequenz ca. 10 MHz, transversal polarisiert;  $\vec{k} \parallel (110)$ ;  $\vec{\epsilon} \parallel (001)$   
 3) Quarz- Ultraschallwandler, Resonanzfrequenz ca. 10 MHz, longitudinal polarisiert;  $\vec{k} \parallel (110)$ ;  $\vec{\epsilon} \parallel (110)$

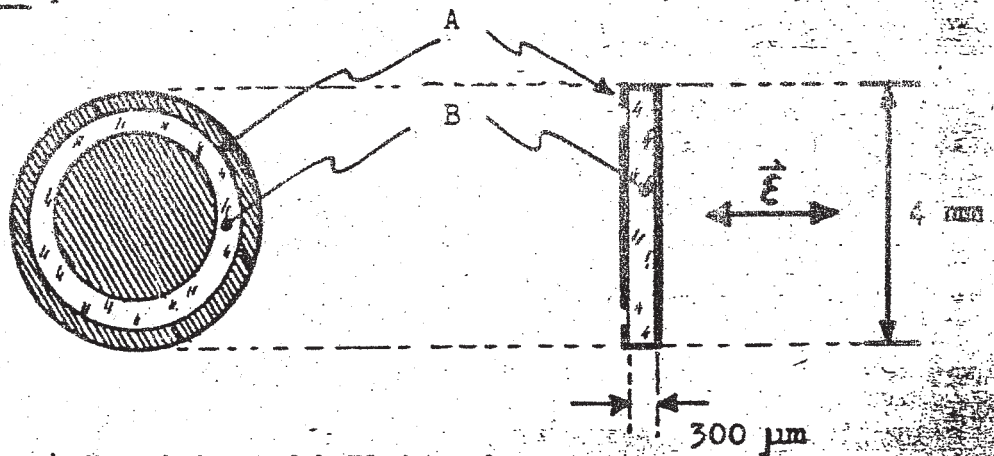
VERSCHIEDENE TRANSDUCER-TYPEN

Longitudinal polarisierter Keramik-Transducer



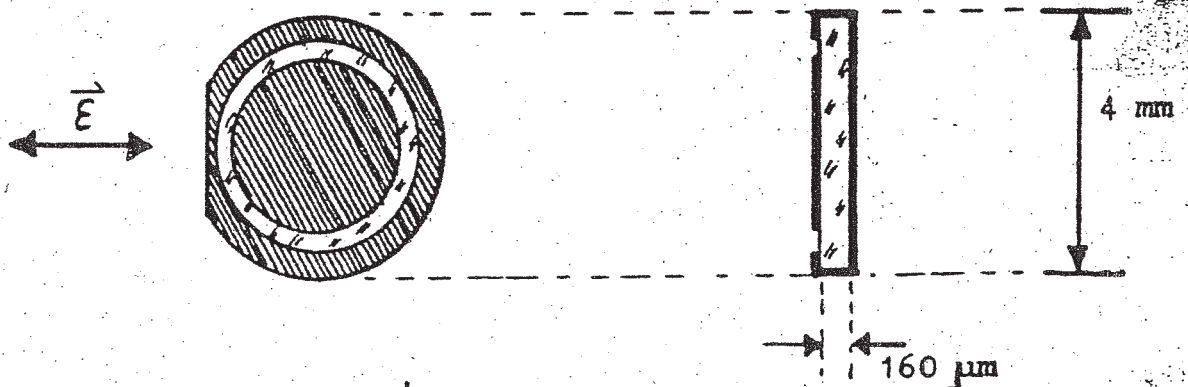
- A) PZT-5 Keramik
- B) Dünne Silber-Elektrode ( ca. 0,1 μm)

Longitudinal polarisierter Quarz-Transducer (x-cut )



- A) Koaxiale Gold-Elektrode
- B) Einkristalliner Quarz (x-cut)

Transversal polarisierter Quarz-Transducer (ac-cut )



allgemein die Erregungsintensität von Nerven, anders umcodiert: Die Nerv **erregung** besteht in einzelnen Impulsen des **Aktionspotentials**, wobei die Erregungsintensität nicht die Höhe der Impulse bestimmt – sie bleibt immer im wesentlichen gleich –, sondern ihre Frequenz. Heftig erregte Zellen feuern häufiger, manchmal mit etwa 1000 Impulsen/s, was schon zeigt, daß der Nervenvorgang keine direkte Ähnlichkeit mit dem Schwingungsvorgang haben kann, sondern umcodiert worden ist. So wird die ganze  $a(\omega)$ -Funktion des Fourier-Spektrums übertragen. Die Phasenlagen spielen keine Rolle. All dies kann man seit *C. W. Bray* und *E. Wever* (1931) mit Mikroelektroden in den einzelnen Fasern direkt nachweisen können.

Wir haben zwei Lokalisierer, um räumlich hören, d. h. Schallquellen lokalisieren zu können. Diese heute durch jede Stereoplatte bestätigte Binsenweisheit wurde lange bezweifelt und erst 1876 durch *Lord Rayleigh* sichergestellt. Die Amplituden-, Phasen- und Laufzeitunterschiede der Signale, die beide Ohren erreichen, korrelieren sich bei verschiedenen Frequenzen in verschiedenem Grade, um die akustische Umwelt zu organisieren: Über 4 kHz Intensitätsunterschiede, unterhalb 3 kHz Phasenunterschiede mit unvollständiger Überlappung zwischen beiden, so daß unterhalb 3 kHz die Orientierung am schlechtesten wird. Anders, durch Echos von selbst ausgesandten Signalen, orten Fledermäuse und Delphine die Objekte; sie hören bis 150 kHz. Auch Blinde und in geringerem Grade wir alle orten bei niederen Frequenzen und daher mit geringerer Auflösung (Aufgabe 4.5.3).

#### 4.5.5 Ultraschall und Hyperschall

Elastische Wellen mit Frequenzen von der menschlichen Hörschwelle (15 bis 20 kHz) bis etwa 10 GHz nennt man **Ultraschall**. Im oberen Teil dieses Bereichs ist die Wellenlänge etwa so groß wie die des sichtbaren Lichts. Dementsprechend verlieren die Beugungserscheinungen, die die Hörschallausbreitung so komplizieren, an Bedeutung. Ultraschall läßt sich ebensogut bündeln wie Licht und zur Ortung und Hinderniserkennung durch Richtstrahlreflexion ausnutzen (**Sonar** in der Schifffahrt, Fledermäusen und Delphinen). Die Raumakustiker studieren Konzerte usw. am verkleinerten Modell mit Schall von proportional verkleinerter Wellenlänge. In Materialien mit einfachem Molekülaufbau, z. B. Metallen ist die Absorption von Ultraschall sehr gering, denn die wesentlichen atomaren Dispersions- und Absorptionsfrequenzen beginnen erst oberhalb von  $10^{10}$  Hz. Daher und wegen seiner Ungefährlichkeit ist Ultraschall zur Materialprüfung, d. h. Entdeckung von Materialfehlern und Dickenmessung, meist den anderen Strahlungen (Röntgen, hartes  $\gamma$  und Neutronen) überlegen. Auch die Medizin mißt Gewebestärken aus Laufzeit von Ultraschallreflexen. Andererseits ist die Absorption, die besonders in hochpolymerem Material, z. B. organischem Gewebe, mit seinen zahlreichen niederfrequenten Schwingungsmöglichkeiten ein technisch wichtig zur Steuerung der Polymerisationsvorgänge und therapeutisch zur Erwärmung tiefliegender Organe. Der Absorptionskoeffizient eines Materials läßt sich sehr elegant nach dem Impulsequivalenzverfahren messen. Der flächenhafte Schallgeber sendet einen sehr kurzen Impuls aus, der an den Wänden der planparallelen Probe mehrfach reflektiert wird und in dem jetzt als Empfänger benutzten Geber eine Folge von Echoimpulsen mit exponentiell abklingender Stärke erzeugt. Die Dämpfungskonstante dieser Impulsfolge gibt bei bekannter Probendicke direkt den Absorptionskoeffizienten. In Abhängigkeit von der Frequenz, a

als Absorptions- bzw. Dispersionskurve, helfen solche Messungen bei der Strukturanalyse.

Mechanische Ultraschallgeber wie Pfeifen und Sirenen erreichen 500 kHz. Bequemer sind elektroakustische Schallgeber, die elektrische oder magnetische Schwingungen nach dem Prinzip der Elektrostriktion oder des umgekehrten Piezoeffekts (vgl. Abschn. 6.2.5) bzw. der Magnetostraktion in mechanische umwandeln. Der Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist am besten für eine mechanische Resonanz mit hohem Gütefaktor, also eine schwach gedämpfte Eigenschwingung des Schallgebers. Schon ein Weicheisen- oder Nickelstab in einer Hochfrequenzspule ist ein guter Ultraschallgeber. Man verringert i. allg. die Dämpfung durch Wirbelströme wie im Transformatorkern durch Schichtung vieler dünner Bleche. Die Resonanzfrequenz des Stabes ergibt sich nach (4.95). Für eine Piezo-Quarzplatte der Dicke  $l$  ist die tiefste Eigenfrequenz  $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{E/\rho}/l = 2,8 \cdot 10^5/l$  ( $l$  in cm; vgl. Tabelle 4.1). Außer Quarz wird Bariumtitanat wegen seiner hohen Elektrostriktion viel verwendet.

Moderne Schallgeber erreichen Schallintensitäten über  $100 \text{ W cm}^{-2}$ , die im hörbaren Bereich  $10^5$  mal höher liegen würden als die Schmerzschwelle. Geeignet geformte Transducer können diese Intensität noch konzentrieren, so daß fast jedes Material zerstört wird. Schon bei viel geringeren Intensitäten ergeben sich physiko-chemische Wirkungen, die man anders kaum erreicht: Feinemulgierung nicht mischbarer Flüssigkeiten, selbst Quecksilber und Wasser, Feindispersierung von Festkörpern in Flüssigkeiten, Abbau von Hochpolymeren mit Einblicken in die Kinetik organischer Reaktionen.

Zwischen  $10^{10}$  und etwa  $10^{13}$  Hz spricht man von Hyperschall. Hiermit endet der Bereich elastischer Festkörperschwingungen, denn die Wellenlänge kann nicht kürzer werden als der doppelte Atomabstand  $2d$ . Bei  $\lambda = 2d$  schwingen benachbarte Atome gegenphasig, und jede geometrisch noch kürzere Welle wäre physikalisch gleichwertig einer längeren (vgl. Abschn. 14.2.1). Für Stahl mit  $c_S = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$  und  $d = 2,9 \text{ \AA}$  folgt eine Grenzfrequenz (Debye-Frequenz)  $\nu_G = \frac{1}{2} c_S/d \approx 10^{13} \text{ Hz}$ .

Im Hyperschallbereich verschwindet der Unterschied zwischen Schall- und Wärmeschwingungen. Da die Wellenlänge nicht viel größer ist als der Atomabstand, treten erhebliche Phasenverschiebungen zwischen Druck und Atombewegung auf, die zu starker Absorption führen, aber auch interessante festkörperphysikalische und molekularkinetische Untersuchungen ermöglichen. Bei sehr tiefen Temperaturen frieren die für diese Absorption verantwortlichen Schwingungen ein (vgl. Abschn. 14.2.1). Hyperschall wurde daher erstmals (Baranski, 1957) in einem heliumgekühlten Quarzstab durch Ankopplung an zwei Mikrowellen-Koaxialresonatoren erzeugt.

#### 4.6 Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten

Wasserwellen sind physikalisch ebenso interessant wie außerphysikalisch, dabei theoretisch so schwierig, daß wir hier keine allgemeine

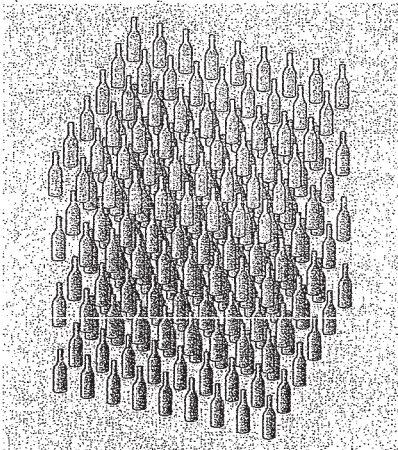


Abb. 6.50. Ein System mit polarer vierzähliger Achse

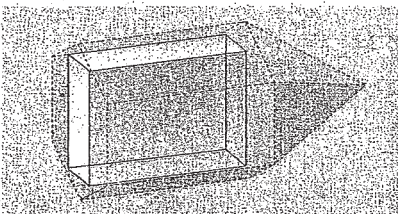


Abb. 6.51. Orientierung einer piezoelektrischen Quarzplatte zum Kristall, aus dem sie herausgeschnitten ist

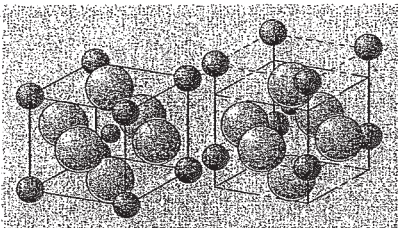


Abb. 6.52. Bariumtitanat, eines der wichtigsten Ferroelektrika und Piezoelektrika. Die kubische Perowskit-Struktur ohne polare Achse deformiert sich unterhalb des ferroelektrischen Curie-Punktes spontan in die tetragonale Struktur (*rechts*), in der Anionen und Kationen in einer der sechs möglichen Richtungen verschoben sind und eine spontane elektrische Polarisation erzeugen. Einen anderen Mechanismus der Ferroelektrizität zeigt Abb. 7.66

### 6.2.5 Elektrostriktion; Piezo- und Pyroelektrizität

Bringt man einen Isolator in ein elektrisches Feld  $E$ , dann verschieben sich Ladungen darin, und die Folge ist eine mechanische Deformation bzw. eine mechanische Spannung. Beides nennt man **Elektrostriktion**. Umgekehrt kann eine mechanische Deformation die Ladungen so verschieben, daß eine elektrische Polarisation, also ein elektrisches Feld entsteht. Ob ein solcher **Piezoeffekt** aufhängt davon ab, ob der Isolator eine polare Achse hat oder nicht. Um eine polare Achse herrscht zwar Rotationssymmetrie, aber die beiden Richtungen der Achse sind nicht gleichwertig. Die Achse einer Flasche in einem großen Stapel von Blechkästen ist eine vierzählige Symmetrieachse (wenn man von den Kastenwänden absieht): Jede Flasche hat vier nächste Nachbarn in  $90^\circ$  Winkelabstand voneinander, aber Flaschen sind oben und unten verschieden. Gase und Flüssigkeiten haben überhaupt keine Symmetrieachse, aber auch die Symmetrieachsen vieler Kristalle z. B. NaCl, sind nicht polar. Solche Stoffe können nicht piezoelektrisch sein, da wer sollte entscheiden, in welche Richtung das elektrische Feld zeigen soll? / dem gleichen Grund kann in solchen Stoffen die elektrostriktive Deformation proportional zu  $E^2$  sein. Wäre sie proportional zu  $E$ , dann müßte bei einer Verzeichnungumkehr von  $E$  auch die Deformation von einer Stauchung in eine Dehnung übergehen oder umgekehrt. Ohne polare Achse kann es aber wieder keinen Unterschied zwischen den beiden Feldrichtungen geben.

In Stoffen mit polarer Achse ist das anders: Eine relative Deformation  $\varepsilon = \Delta x/x$  erzeugt ein elektrisches Piezofeld  $E$ , das proportional zu dieser Deformation ist, d. h. eine Spannung  $U = Ex$  zwischen den Stirnflächen, die proportional  $\Delta x$  ist:

$$E = \delta \frac{\Delta x}{x} \quad \text{oder} \quad U = \delta \Delta x. \quad (6.1)$$

$\delta$  heißt piezoelektrischer Koeffizient und ist für die verschiedenen Kristallrichtungen oft sehr verschieden. Die Deformation beruht darauf, daß die in der Feldrichtung hintereinanderliegenden Dipole einander anziehen. Benachbarte Schichten werden durch diese Kräfte so lange einander genähert, bis elastische Gegenkräfte die elektrischen kompensieren. Die Deformation erfolgt gegen die Coulombfelder zwischen Elementarladungen; diese Felder haben die Größenordnung  $e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , wo  $r \approx 10^{-10} - 10^{-9}$  m ein typischer Teilchenabstand ist. Diese Größenordnung des Feldes von  $10^9 - 10^{11}$  V m<sup>-1</sup> hat auch  $\delta$ .

Die gebräuchlichsten Piezomaterialien sind **Quarz**, **Turmalin**, **Bariumtitanat** (BaTiO<sub>3</sub>) in seiner tetragonalen Kristallform, **Piezokeramiken** meist aus Ba- und Sr-Salzen mit isotropem Piezoeffekt. Wichtig sind auch organische Salze wie **Natriumtartrat** (**Seignette-Salz** und **Rochelle-Salz**), in denen die Polarisation nicht auf einer Verschiebung von Elektronen beruht, sondern von Protonen in Wasserstoffbrücken; gleichzeitig haben diese Salze eine sehr hohe DK und verhalten sich ferroelektrisch (Abschn. 7.4.8). Abbildung 6.53 zeigt den transversalen Piezoeffekt am Quarz (Feldrichtung senkrecht zur Deformationsrichtung; daneben gibt auch einen longitudinalen Effekt).

Die Umkehr des Piezoeffekts besteht in einer Verlängerung oder Verkürzung der Quarzplatte, je nach der Polung der Spannung, die man an die Belegung legt. Eine Wechselspannung, die in der Frequenz mit einer mechanischen Eigenschwingung der Quarzplatte übereinstimmt, regt diese zu Resonanzschwingung an. Der Schwingquarz ist als Ultraschallsender und zur Stabilisierung der Frequenz von Schwingkreisen in Quarzuhren und Sendern sehr wichtig.

Ein Stoff ohne polare Achse kann keine zum äußeren Feld  $E$  proportionale Deformation zeigen, denn sonst müßte er in Umkehrung dieses Effekts auch piezoelektrisch sein. Die Deformation kann höchstens proportional zu  $E^2$  sein. Eine solche quadratische Elektrostriktion ist viel kleiner als die lineare bei polaren Stoffen.



denn die Felder  $E$  sind immer ins Verhältnis zu den mindestens  $10^5$  mal größeren Coulomb-Feldern zwischen den Kristallbausteinen zu setzen.

Die beiden Richtungen einer polaren Achse unterscheiden sich meist in der Anordnung der positiven und negativen Ionen im Kristall. Solche Stoffe wie Quarz und Turmalin haben daher eine spontane elektrische Polarisierung. Die Aufladung der Oberflächen ist allerdings normalerweise durch freie Ladungen aus der Umgebung kompensiert. Bei plötzlicher Temperaturänderung tritt die Aufladung in Erscheinung (**Pyroelektrizität**), erstens weil sich die innere Polarisation geändert hat und nicht sogleich durch fremde Ladungen ausgeglichen wird, zweitens wegen des Piezoeffekts infolge der thermischen Längenänderung.

## 6.3 Gleichströme

Selbst der schwächste Gleichstrom, wie ihn die elektrochemischen Elemente von *Luigi Galvani* und *Alessandro Volta* lieferten (1794), transportiert in ganz kurzer Zeit viel mehr Ladung, als man in den größten Elektrifiziermaschinen durch Reibung erzeugen konnte.

### 6.3.1 Stromstärke

In der **Elektrostatik**, wo Ladungen als ruhend, also im Gleichgewicht angenommen werden, ist es richtig, daß längs eines Leiters keine Potentialdifferenz bestehen kann. Im täglichen Leben legt man dagegen ständig Spannung an Leiter mit der Folge, daß sich die Ladungen bewegen, also Ströme fließen. Freilich können diese Ströme nur auf Kosten äußerer Energiequellen aufrechterhalten werden; sich selbst überlassen, würde der Leiter sehr schnell den von der Elektrostatik geforderten Zustand konstanten Potentials annehmen.

Wenn während der Zeit  $dt$  durch den Querschnitt eines Leiters, z. B. einen Draht, die Ladungsmenge  $dQ$  fließt, so sagt man, es fließe ein Strom mit der Stromstärke

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (6.56)$$

Im internationalen System ist die Einheit der Stromstärke dementsprechend  $1 \text{ C s}^{-1} = 1 \text{ A}$  (Ampere).

Der Strom durch einen Leiter kann nur dann zeitlich konstant, also ein **Gleichstrom** sein, wenn die Spannung zwischen den Leiterenden und überhaupt zwischen je zwei Leiterpunkten konstant ist. Umgekehrt: In einem geschlossenen Stromkreis, in dem ein Gleichstrom fließt, ist die Stromstärke für jeden Querschnitt dieselbe, denn sonst gäbe es Teile des Leiters, wo ständig Ladung abgezogen wird oder sich anhäuft. Das wäre höchstens der Fall, wenn der betrachtete Querschnitt zwischen den Platten eines Kondensators durchlief. Sieht man den Kondensator als ein Ganzes an, dann fließt auch durch ihn der gleiche Strom wie überall sonst im Stromkreis.

Bedenkt man, daß die Ladung einem Erhaltungssatz gehorcht und daß das elektrostatische Feld ein Potential besitzt, dann ergeben sich sofort die Grundregeln zur Analyse beliebiger Schaltungen:

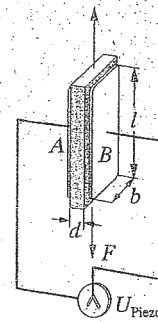


Abb. 6.53. Transversaler Piezoeffekt

---

Wolfgang Demtröder

# Experimentalphysik 1

Mechanik und Wärme

Mit 558, meist zweifarbigen Abbildungen, 9 Farbtafeln,  
38 Tabellen, zahlreichen durchgerechneten Beispielen  
und 159 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona  
Budapest

---

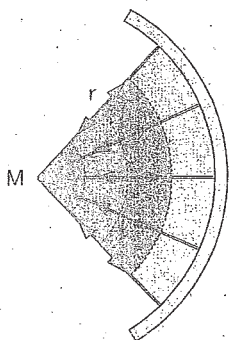


Abb. 10.43. Reflexion einer Kugelwelle in sich selbst durch einen Hohlspiegel ( $M$ : Mittelpunkt,  $r$ : Radius)

Die Darstellung einer harmonischen Kugelwelle, die im Zentrum bei  $r = 0$  erregt wird, ist daher für  $r > 0$ :

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (10.71a)$$

bzw. in komplexer Schreibweise:

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (10.71b)$$

Sie unterscheidet sich außer in der mit  $1/r$  abfallenden Amplitude auch in der Phase, da hier  $kr$  anstelle des Skalarproduktes  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \vartheta$  tritt. Man kann eine durch die Quelle  $Q$  erzeugte auslaufende Kugelwelle durch Reflexionen an einem sphärischen Hohlspiegel wieder in den Ursprungsort  $Q$  zurücklaufen lassen (Abb. 10.43). Die reflektierte Welle entspricht dann einer einlaufenden Kugelwelle

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t + kr)}, \quad (10.71c)$$

die sich in umgekehrter Richtung wie die auslaufende Kugelwelle ausbreitet.

### 10.9.5 Ausbreitung von Wellen in verschiedenen Medien

Die mathematische Darstellung von Wellen in den vorigen Abschnitten gilt ganz allgemein für Wellen aller Art, also auch für elektromagnetische Wellen wie z.B. Lichtwellen, deren Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = c$  um etwa 5–6 Größenordnungen höher ist als die mechanischer Wellen.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  mechanischer Wellen von den Eigenschaften des Mediums abhängt. Dazu soll die Ausbreitung von Wellen in festen, gasförmigen und flüssigen Körpern diskutiert werden.

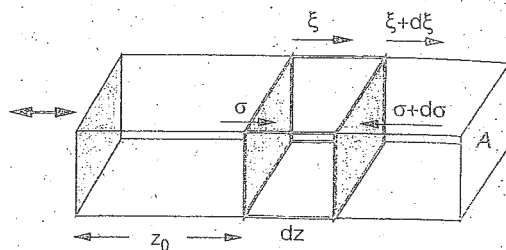


Abb. 10.44. Zur Herleitung der Wellengleichung (10.74)

#### a) Elastische Longitudinalwellen in festen Körpern

Als Beispiel für eine Longitudinalwelle betrachten wir in Abb. 10.44 eine Verdichtungswelle, die durch einen langen Stab mit Querschnitt  $A$  läuft, wenn an einem Ende periodische Druckwellen (z.B. durch einen Lautsprecher) erzeugt werden. Das Stabmaterial habe die Dichte  $\rho$  und den Elastizitätsmodul  $E$ .

Die Teilchen in einer Fläche  $z = \text{const}$  mögen die Schwingungsamplitude  $\xi$  haben. Teilchen einer um  $dz$  entfernten Fläche  $z + dz = \text{const}$  haben dann die Schwingungsamplitude:

$$\xi + d\xi = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz.$$

Durch die Schwingung ändert sich die Dicke  $dz$  eines Volumenelementes  $dV = A \cdot dz$  daher um  $(\partial \xi / \partial z) dz$ . Infolge der dabei nach dem Hookeschen Gesetz auftretenden elastischen Spannungen treten rücktreibende Kräfte  $F = \sigma \cdot A$  auf.

Die mechanische Spannung  $\sigma = F/A$ , die bei der Längenänderung  $(\partial \xi / \partial z) dz$  einer Länge  $dz$  erzeugt wird, ist nach dem Hookeschen Gesetz (Abschn. 6.2.1):

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (10.72)$$

Am rechten Ende des Volumenelementes tritt die mechanische Spannung

$$\sigma + d\sigma = \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz$$

auf, so daß auf unser Volumenelement die Nettokraft

$$\begin{aligned} \Delta F &= A \cdot (\sigma + d\sigma - \sigma) = A \cdot d\sigma \\ &= A \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (10.73a)$$

wirkt. Diese führt zu einer Beschleunigung  $\partial^2 \xi / \partial t^2$ , welche sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Delta V \\ &= \rho \cdot A \, dz \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (10.73b)$$

ergibt. Einsetzen von (10.73a) liefert die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (10.74)$$

und durch Vergleich mit (10.63) die Geschwindigkeit der longitudinalen Schallwelle in einem festen isotropen Medium mit Elastizitätsmodul  $E$  und Dichte  $\rho$

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{E/\rho} \quad (10.75a)$$

Aus der Messung der Schallgeschwindigkeit läßt sich daher der Elastizitätsmodul  $E$  bestimmen. Wird auch die bei longitudinalen Verzerrungen auftretende Querkontraktion berücksichtigt (Abschn. 6.2.2), so ergibt sich statt (10.75a):

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (10.75b)$$

**b) Transversale Wellen in festen Körpern**

Bei einer Transversalwelle werden benachbarte Schichten des Mediums gegeneinander senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verschoben. Die Kopplung benachbarter schwingender Schichten erfolgt daher durch die Scherkraft. Die Wellengeschwindigkeit muß deshalb vom Schermodul  $G$  (Torsionsmodul) abhängen (Abschn. 6.2.3).

Die Herleitung der Wellengleichung ist völlig analog zu der für Longitudinalwellen und wir erhalten für die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle in einem isotropen Medium für kleine Auslenkungen

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{G/\rho} \quad (10.76)$$

In Tabelle 10.1 sind für einige isotrope Festkörper die Phasengeschwindigkeiten für Longitudinal- und Transversalwellen angegeben.

**Tabelle 10.1.** Schallgeschwindigkeiten von Longitudinal- und Transversalwellen in einigen isotropen unendlich ausgedehnten festen Körpern bei 20 °C

Material	$v_{\text{long}}/\text{m s}^{-1}$	$v_{\text{trans}}/\text{m s}^{-1}$
Aluminium	6420	3040
Titan	6070	3125
Eisen	5950	3240
Blei	1960	690
Pyrexglas	5640	3280
Flintglas	3980	2380
Nylon	2620	1070

**c) Schallwellen in anisotropen Festkörpern**

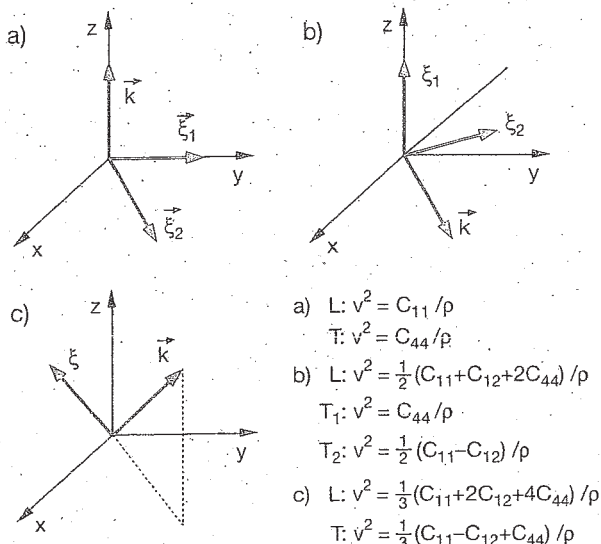
Wenn der Festkörper nicht isotrop ist (z.B. ein Einkristall), so hängen die Rückstellkräfte von der Richtung ab (der Elastizitätsmodul  $E$  wird ein Tensor). Dann hängt  $v_{\text{Ph}}$  von der Ausbreitungsrichtung der Welle ab und ist nicht nur verschieden für Transversal- und Longitudinalwellen, sondern auch für die verschiedenen Auslenkungsrichtungen bei einer Transversalwelle.

Die Messung der Schallgeschwindigkeit in anisotropen Kristallen erlaubt die Bestimmung der richtungsabhängigen Rückstellkräfte, d.h. der Komponenten  $E_{ik}$  des Elastizitätstensors  $E$  [10.5, 6].

Bezeichnen wir mit  $F_{xy}$  die Kraftkomponente in  $x$ -Richtung, die auf eine Fläche mit der Flächennormale in  $y$ -Richtung wirkt (Scherkraft), so läßt sich ein verallgemeinertes Hookesches Gesetz (6.2) für den Zusammenhang zwischen den Zugkräften ( $F_{xx}, F_{yy}, F_{zz}$ ) bzw. den Scherkräften ( $F_{xy}, F_{xz}, F_{yz} \dots$ ) und den Verformungen eines anisotropen elastischen Körpers formulieren. Die Verzerrungen werden dabei wie folgt definiert: Hat man im Punkte  $P$  ein Kartesisches Dreibein mit den Einheitsvektoren  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  festgelegt, so gehen diese Einheitsvektoren durch die Verformung über in neue Vektoren

$$\begin{aligned} x' &= (1 + e_{xx})\hat{x} + e_{xy}\hat{y} + e_{xz}\hat{z} \\ y' &= e_{yx}\hat{x} + (1 + e_{yy})\hat{y} + e_{yz}\hat{z} \\ z' &= e_{zx}\hat{x} + e_{zy}\hat{y} + (1 + e_{zz})\hat{z} \end{aligned}$$

die sich als Linearkombinationen der alten Vektoren schreiben lassen. Die Größen  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$  geben dabei



**Abb. 10.45.** Mögliche verschiedene Transversalwellen in einem kubischen anisotropen Kristall, mit Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Richtung (a) der Würfelkante, (b) der Flächendiagonale und (c) der Raumdiagonalen

die relativen Dehnungen an, die Nichtdiagonalglieder  $e_{xy}, e_{xz}, \dots$  die Scherungen.

Mit den Abkürzungen  $1 = xx, 2 = yy, 3 = zz, 4 = yz, 5 = zx, 6 = xy$  für die Doppelindizes kann dann der Zusammenhang zwischen den Komponenten der Zug- und Scherkräfte  $F_K$  und den Verformungen  $e_i$  geschrieben werden als

$$F_K = \sum_{i=1}^6 C_{Ki} \cdot e_i \quad (K = 1, 2, \dots, 6)$$

Die  $C_{Ki}$  bilden die Komponenten des Elastizitätstensors. Sie können bestimmt werden durch Messung der Schallgeschwindigkeiten von Longitudinalwellen und von Transversalwellen mit geeignet gewählten Richtungen der Auslenkungen  $\xi$  und des Wellenvektors  $k$ .

In Abb. 10.45 sind für drei Ausbreitungsrichtungen in einem kubischen Kristall die Longitudinal-

**Tabelle 10.2.** Elastische Konstanten  $C_{Ki}$  in der Einheit  $10^{10}$  N/m<sup>2</sup> für einige kubische Einkristalle

Material	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$
Aluminium	10,82	6,1	2,8
Eisen	23,7	14,1	11,6
NaCl	4,9	1,24	1,26

und Transversalwellen mit ihren Phasengeschwindigkeiten dargestellt. In Abb. 10.45a liegt  $v_{Ph}$  parallel zu einer Würfelkante. Hier ergeben die beiden Polarisationsrichtungen der Transversalwellen  $T_1$  und  $T_2$  dieselbe Phasengeschwindigkeit, die aber unterschiedlich ist von der der Longitudinalwelle. In Abb. 10.45b liegt  $v_{Ph}$  in Richtung der Flächendiagonale. Hier haben  $T_1$  und  $T_2$  unterschiedliche Werte von  $v_{Ph}$ . In Abb. 10.45c zeigt  $v_{Ph}$  in Richtung der Raumdiagonale.

Tabelle 10.2 gibt einige Zahlenwerte für die Komponenten  $C_{Ki}$  des Elastizitätstensors.

**d) Transversale Wellen entlang einer gespannten Saite**

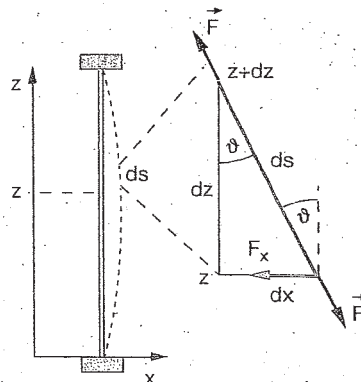
Wird eine in z-Richtung gespannte Saite in x-Richtung aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so wirkt auf ein infinitesimal kleines Längenelement  $ds$  die rücktreibende Kraft in x-Richtung (Abb. 10.46)

$$\begin{aligned} dF_x &= (F \cdot \sin \vartheta)_{z+dz} - (F \cdot \sin \vartheta)_z \\ &= (F \cdot \sin \vartheta)_z + \frac{\partial}{\partial z} (F \cdot \sin \vartheta) dz - (F \cdot \sin \vartheta)_z \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (F \cdot \sin \vartheta) dz \end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen  $dx$  ist  $\vartheta \ll 1$  und  $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta = \partial x / \partial z$ , so daß die rücktreibende Kraft auf  $ds$

$$dF_x = F \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz$$

wird. Ist  $\mu$  die Masse der Saite pro Längeneinheit, so erhalten wir für  $ds \approx dz$  die Newtonsche Gleichung



**Abb. 10.46.** Zur Berechnung der Ausbreitung einer Transversalwelle entlang einer gespannten Saite

---

# Einführung in die Festkörperphysik

---

von  
Charles Kittel

---

12., vollständig überarbeitete und aktualisierte Auflage

Deutsche Ausgabe neu bearbeitet und aktualisiert von  
Jochen Matthias Greß und Anne Lessard

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1999



**Tabelle 3.10:** Zum Gebrauch der in Tabelle 3.9 gegebenen Standardradien von Ionen.

Der Abstand  $D$  zwischen den Ionen eines Ionenkristalls ist durch  $D_N = R_C + R_A + \Delta_N$  gegeben. Dabei ist  $N$  die Koordinationszahl des Kations (positiv geladenes Ion),  $R_C$  und  $R_A$  sind die Standardradien des Kations und des Anions,  $\Delta_N$  ist eine Korrektur, welche die Koordinationszahl berücksichtigt. Die Werte gelten bei Zimmertemperatur. (Nach Zachariasen)

$N$	$\Delta_N(\text{\AA})$	$N$	$\Delta_N(\text{\AA})$	$N$	$\Delta_N(\text{\AA})$
1	-0,50	5	-0,05	9	+0,11
2	-0,31	6	0	10	+0,14
3	-0,19	7	+0,04	11	+0,17
4	-0,11	8	+0,08	12	+0,19

Dies kann ein Hinweis darauf sein, daß die Bindung nicht rein ionisch, sondern teilweise kovalent ist.

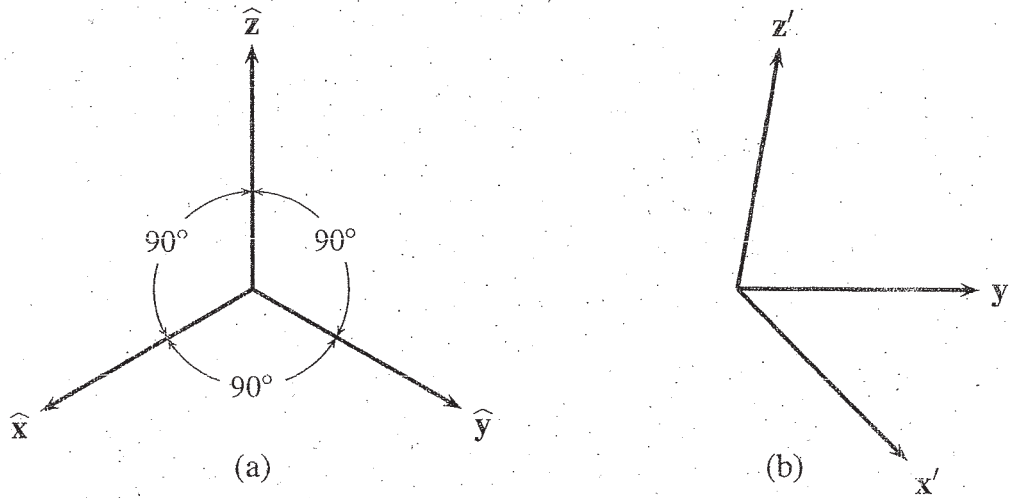
## Beschreibung elastischer Dehnungen

Wir betrachten die elastischen Eigenschaften eines Kristalls, den wir hier als homogenes, kontinuierliches Medium ansehen wollen, nicht als periodische Anordnung einzelner Atome. Diese Kontinuumsnäherung ist normalerweise dann sinnvoll, wenn man elastische Wellen mit Wellenlängen  $\lambda$  von mehr als  $10^{-6}$  cm bzw. Frequenzen unter  $10^{11}$  bis  $10^{12}$  Hz betrachtet. Ein Teil des im folgenden dargestellten Stoffes mag kompliziert erscheinen durch die – unvermeidliche – Vielzahl der Indizes. Die zugrundeliegenden physikalischen Ideen sind jedoch einfach: wir verwenden das Hooksche Gesetz sowie die Newtonsche Bewegungsgleichung. Das **Hooksche Gesetz** besagt, daß in elastischen Festkörpern die Dehnung direkt der Spannung proportional ist. Diese Proportionalität gilt nur für kleine Dehnungen. Wir sprechen vom **nichtlinearen Bereich**, wenn die Dehnungen so groß werden, daß das Hooksche Gesetz nicht mehr gilt.

Man beschreibt die Dehnung durch die Größen  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{xy}$ ,  $e_{yz}$ ,  $e_{zx}$ , die weiter unten definiert werden. Wir betrachten hier infinitesimale Dehnungen. Unsere Schreibweise unterscheidet nicht zwischen isothermen (bei konstanter Temperatur) und adiabatischen (bei konstanter Entropie) Verformungen des Festkörpers, weil die geringen Unterschiede zwischen den isothermen und adiabatischen elastischen Konstanten bei Raumtemperatur oder darunter nur selten ins Gewicht fallen.

Wir stellen uns nach Bild 3.14 (a) drei orthogonale Einheitsvektoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  als fest mit dem ungedehnten Festkörper verbunden vor. Eine kleine, *homogene* Verformung des Festkörpers ändert sowohl die Orientierung der Achsen als auch ihre Längen (3.14 (b)). Eine homogene Verformung verzerrt jede primitive Zelle eines Kristalls in derselben Weise. Das deformierte Achsensystem kann man folgendermaßen als Transformation





**Bild 3.14:** Koordinatenachsen zur Beschreibung des Dehnungszustandes; die orthogonalen Einheitsachsen (a) im ungedehnten Zustand werden im gedehnten Zustand zu (b).

des ursprünglichen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (1 + \epsilon_{xx})\hat{\mathbf{x}} + \epsilon_{xy}\hat{\mathbf{y}} + \epsilon_{xz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y}' &= \epsilon_{yx}\hat{\mathbf{x}} + (1 + \epsilon_{yy})\hat{\mathbf{y}} + \epsilon_{yz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z}' &= \epsilon_{zx}\hat{\mathbf{x}} + \epsilon_{zy}\hat{\mathbf{y}} + (1 + \epsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Koeffizienten  $\epsilon_{\alpha\beta}$  beschreiben die Verformung des Festkörpers; sie sind dimensionslos und haben Werte  $\ll 1$ , falls die Dehnung klein ist. Die ursprünglichen Achsen hatten die Längen Eins, was für die gedehnten Achsen nicht notwendig der Fall sein muß. Beispielsweise ist

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1 + 2\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2$$

und damit  $x' \cong 1 + \epsilon_{xx} + \dots$ . In erster Näherung sind die relativen Änderungen der Längen  $x$ ,  $y$  und  $z$  durch  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  und  $\epsilon_{zz}$  gegeben. Wie wirkt sich nun eine Verformung (3.26) auf ein Atom aus, das sich ursprünglich an der Stelle  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  befindet, wobei als Koordinatenursprung der Ort eines anderen Atoms gewählt sei? Falls die Verformung homogen ist, dann wird sich dieser Punkt verschieben nach  $\mathbf{r}' = xx' + yy' + zz'$ .<sup>1</sup> Die **Verschiebung**  $\mathbf{R}$  der Verformung ist dann definiert durch

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r} = x(\mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}) + y(\mathbf{y}' - \hat{\mathbf{y}}) + z(\mathbf{z}' - \hat{\mathbf{z}}) \quad (3.27)$$

oder, unter Verwendung von (3.26),

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) \equiv (x\epsilon_{xx} + y\epsilon_{yx} + z\epsilon_{zx})\hat{\mathbf{x}} + (x\epsilon_{xy} + y\epsilon_{yy} + z\epsilon_{zy})\hat{\mathbf{y}} + (x\epsilon_{xz} + y\epsilon_{yz} + z\epsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.28)$$

<sup>1</sup> Dies ist offenbar dann richtig, wenn man die Achse  $\hat{\mathbf{x}}$  derart wählt, daß  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}}$ ; dann ist  $\mathbf{r}' = xx'$  nach Definition von  $\mathbf{x}'$

Man schreibt die Verschiebung in einer allgemeineren Form, indem man die  $u, v, w$  derart einführt, daß

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + v(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + w(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.29)$$

Falls die Verformung *inhomogen* ist, so müssen die lokal unterschiedlichen Dehnungen in die  $u, v, w$  eingehen. Wir wählen den Ursprung von  $\mathbf{r}$  in der Nähe des zu beschreibenden Bereiches des Körpers. Ein Vergleich von (3.28) und (3.29) ergibt dann

$$x\varepsilon_{xx} \cong x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y\varepsilon_{yy} \cong y \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{etc.} \quad (3.30)$$

wobei wir die Taylor-Entwicklung von  $\mathbf{R}$  mit  $\mathbf{R}(0) = 0$  benutzt haben. Es ist üblich, die Koeffizienten  $e_{\alpha\beta}$  anstelle der  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  zu verwenden. Man definiert diese **Dehnungskomponenten**  $e_{xx}, e_{yy}$  und  $e_{zz}$  mit (3.30) durch

$$e_{xx} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.31)$$

In die übrigen Dehnungskomponenten  $e_{xy}, e_{yz}$  und  $e_{zx}$  gehen die Änderungen der Winkel zwischen den Achsen ein; unter Benutzung von (3.26) definiert man sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} e_{xy} &\equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \cong \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ e_{yz} &\equiv \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' \cong \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{zx} &\equiv \mathbf{z}' \cdot \mathbf{x}' \cong \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vernachlässigt man Terme der Ordnung  $\varepsilon^2$ , so kann man die  $\cong$  durch  $=$  ersetzen. Diese sechs dimensionslosen Koeffizienten  $e_{\alpha\beta} (= e_{\beta\alpha})$  beschreiben die Dehnung eines Festkörpers vollständig.

## Dilation

Als *Dilation* bezeichnet man die relative Volumenzunahme eines Festkörpers bei Dehnung. Unter der Wirkung hydrostatischen Druckes ist die Dilation negativ. Der Einheitswürfel mit den Kanten  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  hat nach der Verformung das Volumen

$$V' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{z}' \quad (3.33)$$

nach der wohlbekannten Beziehung für das Volumen eines Parallelepipeds mit den Kanten  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{z}'$ . Aus (3.26) folgt dann

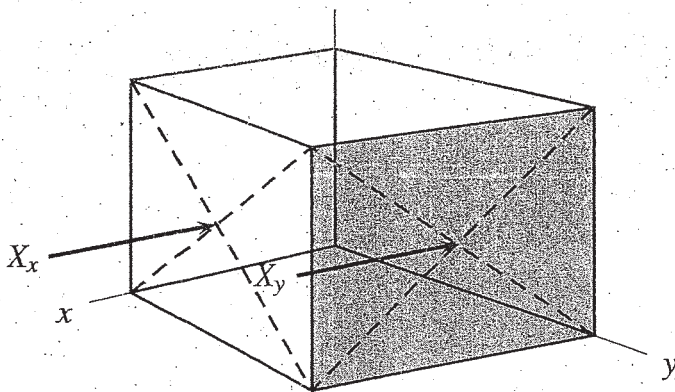
$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \times \mathbf{z}' = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} & 1 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 1 + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \cong 1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \quad (3.34)$$

Hierbei wurden Produkte aus jeweils zwei Dehnungskomponenten vernachlässigt. Die Dilation  $\delta$  ist dann gegeben durch

$$\delta \equiv \frac{V' - V}{V} \cong e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \quad (3.35)$$

## Spannungskomponenten

Die Spannung ist definiert als Kraft auf eine Einheitsfläche im Festkörper. Es gibt neun Spannungskomponenten; sie lauten  $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$ . Die Großbuchstaben bezeichnen die Richtung der Kraft, die Indizes geben die Flächennormale zur Ebene an, auf welche die Kraft wirkt. In Bild 3.15 ist die Spannungskomponente  $X_x$

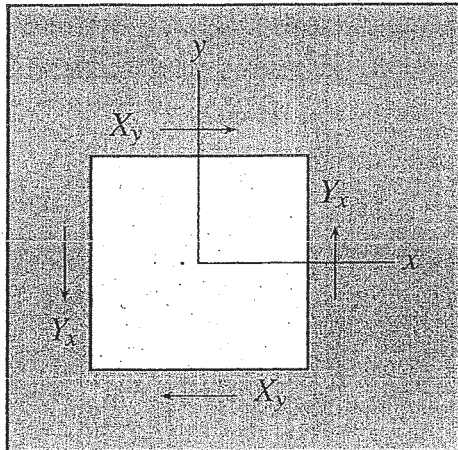


**Bild 3.15:** Die Spannungskomponente  $X_x$  ist eine Kraft in  $x$ -Richtung auf eine Einheitsfläche, deren Normale in  $x$ -Richtung liegt. Die Komponente  $X_y$  wirkt in  $x$ -Richtung auf eine Einheitsfläche, deren Normale in  $y$ -Richtung liegt.

eine Kraft in  $x$ -Richtung, angewandt auf die Einheitsfläche einer Ebene, deren Flächennormale ebenfalls in  $x$ -Richtung liegt. Die Spannungskomponente  $X_y$  ist eine Kraft in  $x$ -Richtung, angewandt auf die Einheitsfläche einer Ebene, deren Flächennormale in  $y$ -Richtung liegt. Man reduziert die Anzahl unabhängiger Spannungskomponenten von neun auf sechs durch die Zusatzbedingung (Bild 3.16), daß die Winkelbeschleunigung des Einheitswürfels verschwindet<sup>1</sup> bzw. das auf den Einheitswürfel wirkende Gesamtdrehmoment gleich Null ist. Daraus folgt

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \quad (3.36)$$

<sup>1</sup> Dies bedeutet nicht, daß wir Problemstellungen mit Winkelbeschleunigung von der Betrachtung ausschließen; es bedeutet lediglich, daß wir zur Definition der elastischen Konstanten die statische Situation annehmen können.



**Bild 3.16:** Für einen Körper im statischen Gleichgewicht ist  $Y_x = X_y$ . Die Summe der Kräfte in  $x$ -Richtung verschwindet, ebenso die Summe der Kräfte in  $y$ -Richtung. Die Gesamtkraft ist Null. Das gesamte Drehmoment um den Ursprung verschwindet unter der Bedingung  $Y_x = X_y$ .

Als die sechs unabhängigen Spannungskomponenten kann man  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$ ,  $Y_z$ ,  $Z_x$  und  $X_y$  wählen.

Die Einheit der Spannungskomponenten ist Kraft pro Einheitsfläche oder Energie pro Einheitsvolumen. Die Dehnungskomponenten sind als Verhältnisse von Längen dimensionslos.

### Elastische Konstanten der Nachgiebigkeit und Steifigkeit

Das Hooksche Gesetz besagt, daß für genügend kleine Verformungen eines Festkörpers die Dehnung direkt proportional der Spannung ist, so daß also die Dehnungskomponenten lineare Funktionen der Spannungskomponenten sind:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= S_{11}X_x + S_{12}Y_y + S_{13}Z_z + S_{14}Y_z + S_{15}Z_x + S_{16}X_y \\
 e_{yy} &= S_{21}X_x + S_{22}Y_y + S_{23}Z_z + S_{24}Y_z + S_{25}Z_x + S_{26}X_y \\
 e_{zz} &= S_{31}X_x + S_{32}Y_y + S_{33}Z_z + S_{34}Y_z + S_{35}Z_x + S_{36}X_y \\
 e_{yz} &= S_{41}X_x + S_{42}Y_y + S_{43}Z_z + S_{44}Y_z + S_{45}Z_x + S_{46}X_y \\
 e_{zx} &= S_{51}X_x + S_{52}Y_y + S_{53}Z_z + S_{54}Y_z + S_{55}Z_x + S_{56}X_y \\
 e_{xy} &= S_{61}X_x + S_{62}Y_y + S_{63}Z_z + S_{64}Y_z + S_{65}Z_x + S_{66}X_y.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Umgekehrt sind auch die Spannungskomponenten lineare Funktionen der Dehnungskomponenten:

$$\begin{aligned}
 X_x &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{zx} + C_{16}e_{xy} \\
 Y_y &= C_{21}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{zx} + C_{26}e_{xy} \\
 Z_z &= C_{31}e_{xx} + C_{32}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{zx} + C_{36}e_{xy} \\
 Y_z &= C_{41}e_{xx} + C_{42}e_{yy} + C_{43}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{zx} + C_{46}e_{xy} \\
 Z_x &= C_{51}e_{xx} + C_{52}e_{yy} + C_{53}e_{zz} + C_{54}e_{yz} + C_{55}e_{zx} + C_{56}e_{xy} \\
 X_y &= C_{61}e_{xx} + C_{62}e_{yy} + C_{63}e_{zz} + C_{64}e_{yz} + C_{65}e_{zx} + C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Größen  $S_{11}, S_{12}, \dots$  bezeichnet man als **Nachgiebigkeitskonstanten** oder **elastische Konstanten**, die Größen  $C_{11}, C_{12}, \dots$  als **Steifigkeitskonstanten** oder **Elastizitätsmoduln**. Die Einheit der  $S$  ist Fläche pro Kraft oder Volumen pro Energie, die Einheit der  $C$  Kraft pro Fläche oder Energie pro Volumen.

## Elastische Energiedichte

Durch weitere Überlegungen kann man die Anzahl der 36 Konstanten in (3.37) oder (3.38) vermindern. Die elastische Energiedichte  $U$  ist in der Näherung des Hookschen Gesetzes eine quadratische Funktion der Dehnungen (erinnern Sie sich an den Ausdruck für die Energie einer gespannten Feder). Deshalb kann man schreiben:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^6 \sum_{\mu=1}^6 \tilde{C}_{\lambda\mu} e_{\lambda} e_{\mu}, \quad (3.39)$$

worin die Indizes 1 bis 6 wie folgt definiert sind:

$$1 \equiv xx, \quad 2 \equiv yy, \quad 3 \equiv zz, \quad 4 \equiv yz, \quad 5 \equiv zx, \quad 6 \equiv xy. \quad (3.40)$$

Wie wir weiter unten sehen werden, sind die  $\tilde{C}$  mit den  $C$  in (3.38) über die Beziehung (3.42) verknüpft.

Die Spannungskomponenten berechnet man als Ableitungen von  $U$  nach der jeweils zugehörigen Dehnungskomponente. Dies folgt aus der Definition einer potentiellen Energie. Die Spannung  $X$  wirke auf eine Fläche eines Einheitswürfels, während die gegenüberliegende Fläche festgehalten wird:

$$X_x = \frac{\partial U}{\partial e_{xx}} \equiv \frac{\partial U}{\partial e_1} = \tilde{C}_{11} e_1 + \frac{1}{2} \sum_{\beta=2}^6 (\tilde{C}_{1\beta} + \tilde{C}_{\beta 1}) e_{\beta}. \quad (3.41)$$

Beachten Sie, daß lediglich die Kombination  $\frac{1}{2}(\tilde{C}_{\alpha\beta} + \tilde{C}_{\beta\alpha})$  in die Spannungs-Dehnungs-Relationen eingeht. Es folgt, daß die Steifigkeitskonstanten symmetrisch sind:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{\alpha\beta} + \tilde{C}_{\beta\alpha}) = C_{\beta\alpha}. \quad (3.42)$$

Damit verringert sich die Anzahl der Steifigkeitskonstanten von 36 auf 21.

## Steifigkeitskonstanten kubischer Kristalle

Die Anzahl unabhängiger Steifigkeitskonstanten verringert sich weiterhin, wenn der Kristall Symmetrien besitzt. Wir zeigen nun, daß es in kubischen Kristallen nur drei unabhängige Steifigkeitskonstanten gibt.

Dazu nehmen wir zunächst an, daß die elastische Energiedichte eines kubischen Kristalls von der Form

$$U = \frac{1}{2}C_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2}C_{44}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + C_{12}(e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy}). \quad (3.43)$$

ist und keine anderen quadratischen Terme wie

$$(e_{xx}e_{xy} + \dots), \quad (e_{yz}e_{zx} + \dots), \quad (e_{xx}e_{yz} + \dots) \quad (3.44)$$

enthält.

Die Symmetrie einer kubischen Struktur muß mindestens vier dreizählige Drehachsen aufweisen. Diese Achsen liegen in  $[111]$  und den dazu äquivalenten Richtungen (Bild 3.17). Eine Drehung von  $2\pi/3$  um jeweils eine dieser vier Achsen vertauscht die Achsen  $x, y, z$  auf eine der folgenden vier Arten:

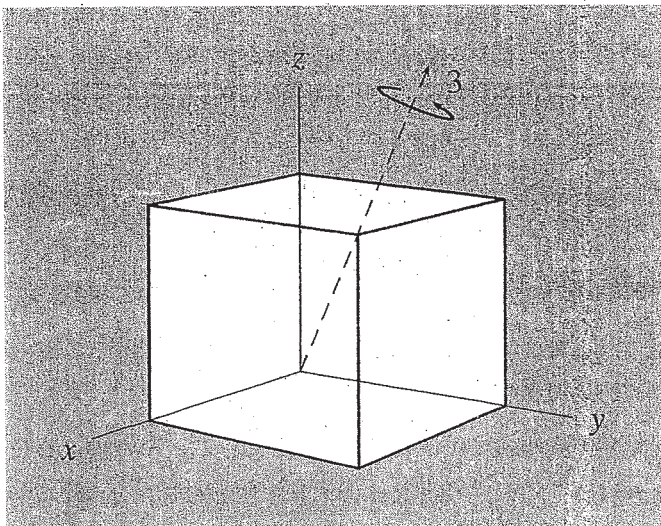
$$\begin{aligned} x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, & \quad -x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow -x, \\ x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow x, & \quad -x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow -x. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Durch Anwendung des ersten Vertauschungsschemas folgt beispielsweise

$$e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 \rightarrow e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + e_{xx}^2,$$

entsprechendes gilt für die übrigen Terme in Klammern in (3.43).

Damit ist (3.43) invariant unter den betrachteten Drehungen. Dagegen ist jeder der Terme in (3.44) unsymmetrisch in mindestens einem Index. Man findet beispielsweise ein Vertauschungsschema (eine Rotation) in (3.45), bei dem sich das Vorzeichen von Termen ändert, wie im Falle  $e_{xy} = -e_{x(-y)}$ . Die Terme (3.19) sind daher nicht invariant unter den betrachteten Symmetrieoperationen.



**Bild 3.17:** Drehung durch  $2\pi/3$  um die mit 3 gekennzeichnete Achse vertauscht die kartesischen Achsen folgendermaßen:  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$ .

Es bleibt noch zu zeigen, daß die numerischen Faktoren in (3.43) korrekt sind. Aus (3.41) folgt

$$\partial U / \partial e_{xx} = X_x = C_{11}e_{xx} + C_{12}(e_{yy} + e_{zz}). \quad (3.46)$$

Hier tritt der Term  $C_{11}e_{xx}$  auf, in Übereinstimmung mit (3.43). Durch weiteren Vergleich erkennt man, daß

$$C_{12} = C_{13}, \quad C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0. \quad (3.47)$$

Aus (3.43) folgt ebenfalls

$$\partial U / \partial e_{xy} = X_y = C_{44}e_{xy}, \quad (3.48)$$

und durch Vergleich mit (3.38) erhält man

$$C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = C_{65} = 0, \quad C_{66} = C_{44}. \quad (3.49)$$

Somit reduziert sich der vollständige Satz der Steifigkeitskonstanten durch Anwendung von (3.43) für einen kubischen Kristall auf die Matrix

	$e_{xx}$	$e_{yy}$	$e_{zz}$	$e_{yz}$	$e_{zx}$	$e_{xy}$
$X_x$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{12}$	0	0	0
$Y_y$	$C_{12}$	$C_{11}$	$C_{12}$	0	0	0
$Z_z$	$C_{12}$	$C_{12}$	$C_{11}$	0	0	0
$Y_z$	0	0	0	$C_{44}$	0	0
$Z_x$	0	0	0	0	$C_{44}$	0
$X_y$	0	0	0	0	0	$C_{44}$

(3.50)

In kubischen Kristallen hängen die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitskonstanten über folgende Beziehungen zusammen:

$$C_{44} = 1/S_{44}, \quad C_{11} - C_{12} = (S_{11} - S_{12})^{-1}, \quad C_{11} + 2C_{12} = (S_{11} + 2S_{12})^{-1}. \quad (3.51)$$

Man erhält diese Relationen durch Inversion der Matrix (3.50).

## Elastizitätsmodul und Kompressibilität

Wir betrachten die gleichförmige Dilation  $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \frac{1}{3}\delta$ . Die Energiedichte (3.43) eines kubischen Kristalls ist für diese Verformung

$$U = \frac{1}{6}(C_{11} + 2C_{12})\delta^2. \quad (3.52)$$

Wir können nun den **Elastizitätsmodul**  $B$  durch

$$U = \frac{1}{2} B \delta^2 \quad (3.53)$$

definieren, ganz analog zur Definition  $-V dp/dV$ . Für einen kubischen Kristall ist

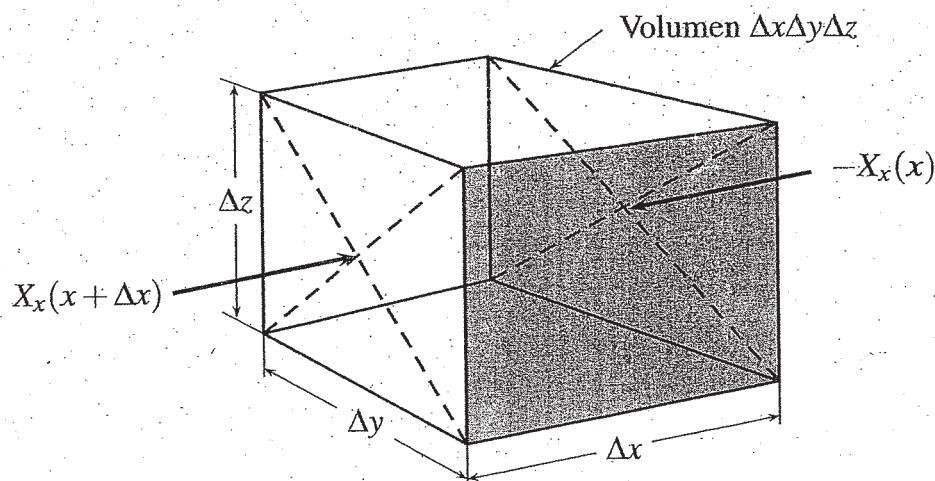
$$B = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}). \quad (3.54)$$

Die **Kompressibilität**  $K$  ist dann definiert durch  $K \equiv 1/B$ . Werte von  $B$  und  $K$  sind in Tabelle 3.3 angegeben.

## Elastische Wellen in kubischen Kristallen

Betrachtet man anhand der Bilder 3.18 und 3.19 die Kräfte, welche auf ein Volumenelement im Kristall einwirken, so erhält man die Bewegungsgleichung des Volumenelements in  $x$ -Richtung zu

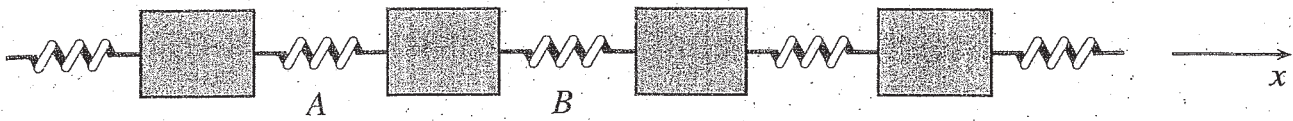
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}. \quad (3.55)$$



**Bild 3.18:** Würfel vom Volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , auf dessen Oberfläche an der Stelle  $x$  eine Spannung  $-X_x(x)$  wirkt, während die Spannung  $X_x(x + \Delta x) \cong X_x(x) + \frac{\partial X_x}{\partial x} \Delta x$  an der gegenüberliegenden Fläche bei  $x + \Delta x$  angreift. Die Gesamtkraft ist  $\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z$ . Weitere, hier nicht gezeichnete Kraftkomponenten in  $x$ -Richtung entstehen dadurch, daß die Spannungen  $X_y$  und  $X_z$  über den Würfel variieren; sie sind nicht eingezeichnet.

Die Kraft ist das Produkt aus der Masse des Würfels und dessen Beschleunigung in  $x$ -Richtung. Die Masse des Würfels ist  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , seine Beschleunigung  $\partial^2 u / \partial t^2$ .





**Bild 3.19:** Die Gesamtkraft auf den Körper zwischen den Federn A und B verschwindet, wenn die Federn gleich stark gespannt sind. Dies veranschaulicht die Tatsache, daß die Gesamtkraft auf ein Volumenelement innerhalb eines Festkörpers verschwindet, wenn dieser unter der Wirkung einer homogenen Spannung  $X_x$  steht. Ist die Feder B stärker gespannt als die Feder A, so wird der Körper dazwischen durch eine Kraft  $X_x(B) - X_x(A)$  beschleunigt.

Darin bezeichnet  $\rho$  die Dichte und  $u$  die Verschiebung in  $x$ -Richtung. Entsprechende Gleichungen gelten für die Richtungen  $y$  und  $z$ . Aus (3.38) und (3.50) folgt, daß für den kubischen Kristall

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + C_{12} \left( \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + C_{44} \left( \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} \right), \quad (3.56)$$

wobei die Achsen  $x, y, z$  parallel zu den Würfelkanten liegen. Benutzt man die Definitionen (3.31) und (3.32) der Dehnungskomponenten, so erhält man

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right), \quad (3.57a)$$

mit den Komponenten  $u, v, w$  der Verschiebung  $\mathbf{R}$ , definiert durch (3.29).

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen für  $\partial^2 v / \partial t^2$  und  $\partial^2 w / \partial t^2$  folgen direkt aus (3.57a) durch Symmetriebetrachtung:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right), \quad (3.57b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right). \quad (3.57c)$$

Wir suchen nun nach einfachen, speziellen Lösungen dieser Gleichungen.

## Wellen in Richtung [100]

Eine Lösung von (3.57a) ist die Longitudinalwelle

$$u = u_0 \exp[i(Kx - \omega t)]. \quad (3.58)$$

$u$  ist die  $x$ -Komponente der Verschiebung eines Teilchens. Sowohl der Wellenvektor als auch die Richtung der Teilchenbewegung sind parallel zur  $x$ -Kante des Würfels.  $K = 2\pi/\lambda$  ist der Wellenvektor und  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz. Wir setzen (3.58) in (3.57a) ein und erhalten

$$\omega^2 \rho = C_{11} K^2. \quad (3.59)$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit  $\omega/K$  einer Longitudinalwelle in Richtung [100] zu

$$v_s = \nu\lambda = \omega/K = (C_{11}/\rho)^{1/2}. \quad (3.60)$$

Betrachten wir nun eine Transversalwelle oder Scherwelle mit Wellenvektor parallel zur  $x$ -Kante des Würfels, aber mit einer Teilchenverschiebung  $v$  in  $y$ -Richtung:

$$v = v_0 \exp[i(Kx - \omega t)]. \quad (3.61)$$

Setzt man (3.61) in (3.57b) ein, so ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\omega^2 \rho = C_{44} K^2 \quad (3.62)$$

und daraus die Geschwindigkeit  $\omega/K$  einer Transversalwelle in Richtung [100] zu

$$v_s = (C_{44}/\rho)^{1/2}. \quad (3.63)$$

Man erhält ein identisches Ergebnis für die Geschwindigkeit, wenn man eine Teilchenverschiebung in  $z$ -Richtung betrachtet. Die beiden unabhängigen Scherwellen breiten sich demnach mit gleicher Geschwindigkeit aus, falls  $\mathbf{K}$  parallel zur Richtung [100] ist.

### Wellen in Richtung [110]

Von besonderem Interesse sind Wellen, die sich in einer flächendiagonalen Richtung innerhalb eines kubischen Kristalls ausbreiten, da man in diesem Falle die Werte der drei elastischen Konstanten in einfacher Weise aus den drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten bestimmen kann.

Betrachten wir eine Scherwelle, die sich in der  $xy$ -Ebene ausbreitet, mit Teilchenverschiebung  $w$  in  $z$ -Richtung:

$$w = w_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]. \quad (3.64)$$

Dann ergibt (3.32c)

$$\omega^2 \rho = C_{44}(K_x^2 + K_y^2) = C_{44} K^2, \quad (3.65)$$

unabhängig von der Ausbreitungsrichtung in der Ebene.

Betrachten wir weiterhin Wellen, die sich in der  $xy$ -Ebene ausbreiten, mit Teilchenverschiebungen ebenfalls in der  $xy$ -Ebene:

$$u = u_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)], \quad v = v_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]. \quad (3.66)$$

Aus (3.57a) und (3.57b) folgt

$$\begin{aligned}\omega^2 \rho u &= (C_{11} K_x^2 + C_{44} K_y^2) u + (C_{12} + C_{44}) K_x K_y v \\ \omega^2 \rho v &= (C_{11} K_y^2 + C_{44} K_x^2) v - (C_{12} + C_{44}) K_x K_y u.\end{aligned}\quad (3.67)$$

Dieses Gleichungspaar hat eine besonders einfache Lösung für eine Welle in Richtung [110], für die  $K_x = K_y = K/\sqrt{2}$ . Bedingung für die Existenz einer Lösung ist das Verschwinden der Determinante aus Koeffizienten von  $u$  und  $v$  in (3.67):

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 & \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 & -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 \end{vmatrix} = 0.\quad (3.68)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})K^2, \quad \omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})K^2.\quad (3.69)$$

Die erste der Lösungen beschreibt eine Longitudinalwelle, die zweite eine Scherwelle. Wie bestimmen wir nun die Richtung der Teilchenverschiebungen? Setzt man die erste Lösung in die obere der Gleichungen (3.67) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})K^2 u = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 u + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 v\quad (3.70)$$

und für die Komponenten der Verschiebung gilt  $u = v$ . Damit ist die Richtung der Teilchenverschiebung parallel zu [110] und zum Vektor  $\mathbf{K}$  (Bild 3.20). Die zweite Lösung von (3.68), eingesetzt in die obere der Gleichungen (3.67), ergibt

$$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})K^2 u = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 u + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 v\quad (3.71)$$

und daher gilt  $u = -v$ . Die Teilchenverschiebung ist parallel zu [110] und senkrecht zur Richtung des Vektors  $\mathbf{K}$ .

Ausgewählte Werte der adiabatischen elastischen Steifigkeitskonstanten für kubische Kristalle bei niedrigen Temperaturen und bei Raumtemperatur sind in Tabelle 3.11 angegeben. Bemerkenswert ist die allgemeine Tendenz zu kleineren Werten bei höheren Temperaturen. Weitere Werte bei Raumtemperatur findet man in Tabelle 3.12.

Zu einem nach Betrag und Richtung gegebenen Wellenvektor  $\mathbf{K}$  gibt es drei Moden der Wellenausbreitung in Kristallen. Im allgemeinen sind die Polarisierungen (d.h. die Richtungen der Teilchenverschiebung) dieser Moden nicht exakt parallel oder senkrecht zu  $\mathbf{K}$ . Im Falle der Ausbreitung in die Richtungen [100], [111] und [110] innerhalb eines kubischen Kristalls ist in zweien der drei Moden zu gegebenem  $\mathbf{K}$  die Teilchenbewegung exakt transversal (senkrecht) zu  $\mathbf{K}$ , in der dritten Mode exakt longitudinal (parallel) zu  $\mathbf{K}$ . Die Analyse der Ausbreitung von Wellen in diese speziellen Richtungen ist sehr viel einfacher als für eine beliebige Richtung.

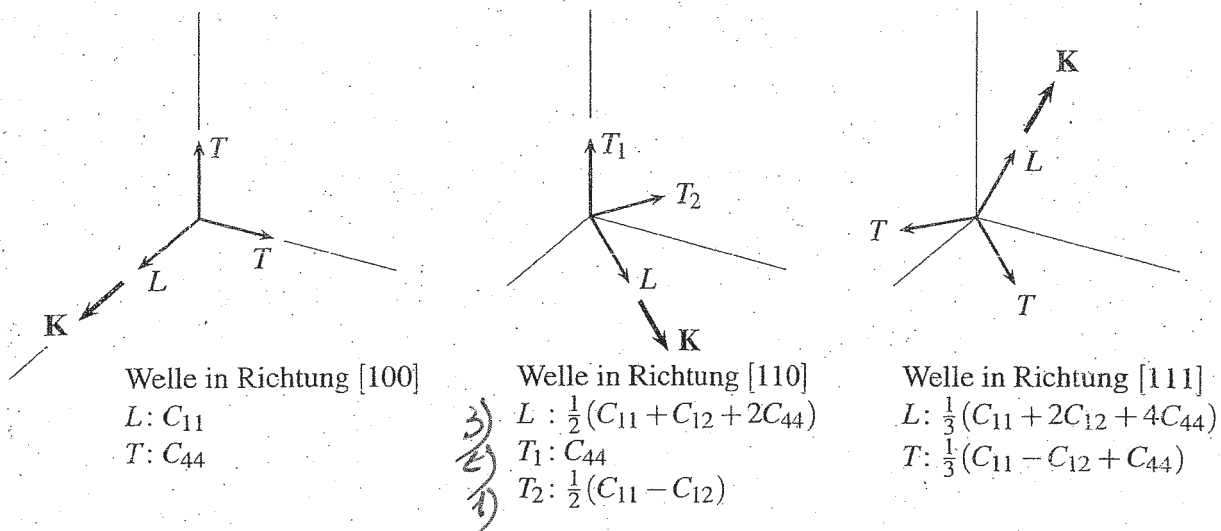
**Tabelle 3.11:** Adiabatische Steifigkeitskonstanten für kubische Kristalle bei niedrigen Temperaturen und bei Raumtemperatur.

Die Werte bei 0 K sind Extrapolationen von Meßreihen, die bis zu 4 K hinabreichen. Diese Tabelle wurde zusammengestellt unter Mitwirkung von Prof. C.S. Smith.

Kristall	Steifigkeitskonstanten in $10^{12}$ dyn/cm <sup>2</sup> ( $10^{11}$ N/m <sup>2</sup> )			Temperatur in K	Dichte in g/cm <sup>3</sup>
	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$		
W	5.326	2.049	1.631	0	19.317
	5.233	2.045	1.607	300	—
Ta	2.663	1.582	0.874	0	16.696
	2.609	1.574	0.818	300	—
Cu	1.762	1.249	0.818	0	9.018
	1.684	1.214	0.754	300	—
Ag	1.315	0.973	0.511	0	10.635
	1.240	0.937	0.461	300	—
Au	2.016	1.697	0.454	0	19.488
	1.923	1.631	0.420	300	—
Al	1.143	0.619	0.316	0	2.733
	1.068	0.607	0.282	300	—
K	0.0416	0.0341	0.0286	4	—
	0.0370	0.0314	0.0188	295	—
Pb	0.555	0.454	0.194	0	11.599
	0.495	0.423	0.0149	300	—
Ni	2.612	1.508	1.317	0	8.968
	2.508	1.500	1.235	300	—
Pd	2.341	1.761	0.712	0	12.132
	2.271	1.761	0.717	300	—

**Tabelle 3.12:** Adiabatische elastische Steifigkeitskonstanten verschiedener kubischer Kristalle bei Raumtemperatur (300 K).

	Steifigkeitskonstanten in $10^{12}$ dyn/cm <sup>2</sup> ( $10^{11}$ N/m <sup>2</sup> )		
	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$
Diamant	10.76	1.25	5.76
Na	0.073	0.062	0.042
Li	0.135	0.114	0.085
Ge	1.285	0.483	0.680
Si	1.66	0.639	0.796
GaSb	0.885	0.404	0.433
InSb	0.672	0.367	0.302
MgO	2.86	0.87	1.48
NaCl	0.487	0.124	0.126



**Bild 3.20:** Effektive elastische Konstanten für die drei Arten elastischer Wellen in den drei Hauptrichtungen der Ausbreitung innerhalb eines kubischen Kristalls. Bei Ausbreitung in Richtung [100] und [111] sind die beiden transversalen Moden entartet.

## Zusammenfassung

- Edelgaskristalle sind durch die van der Waals-Wechselwirkung (induzierte Dipol-Dipol-Wechselwirkung) gebunden, welche wie  $1/R^6$  mit dem Abstand  $R$  variiert.
- Die repulsive (abstoßende) Wechselwirkung zwischen Atomen rührt von der elektrostatischen Abstoßung überlappender Elektronenverteilungen sowie dem Pauli-Prinzip her, das überlappende Elektronen mit parallelem Spin in Zustände mit höherer Energie zwingt.
- Ionenkristalle sind durch die elektrostatische Anziehung zwischen entgegengesetzt geladenen Ionen gebunden. Die elektrostatische Energie einer Struktur aus  $2N$  Ionen der Ladung  $\pm q$  ist

$$(CGS) \quad U = -N\alpha \frac{q^2}{R} = -N \sum \frac{(\pm)q^2}{r_{ij}},$$

wobei  $\alpha$  die Madelung-Konstante und  $R$  der Abstand zwischen nächsten Nachbarn ist.

- Die metallische Bindung ist auf die Erniedrigung der kinetischen Energie der Valenzelektronen im Metall gebundener Atome zurückzuführen.
- Eine kovalente Bindung ist durch das Überlappen der Verteilungen von Elektronen mit antiparallelen Spins charakterisiert. Der Pauli-Beitrag zur Abstoßung wird für antiparallele Spins vermindert, was einen größeren Grad an Überlappung ermöglicht. Die überlappenden Elektronen binden ihre zugehörigen Ionenrümpfe durch elektrostatische Anziehung.